ESERCIZI DI ALGEBRA 1

— GRUPPI —

17-1-2005

Permutazioni

1 — Siano $g = \big(1\,5\,2\,6\big)\big(3\,4\,7\big)$ e $h = \big(1\,5\big)\big(2\,3\,7\,6\big)$ due permutazioni su 7 elementi. Calcolare la permutazione $h \circ g^{-1}$.

2 — Siano $\alpha = \big(2\,3\big)$ e $\beta = \big(1\,3\big)\big(2\,4\,5\big)$ due permutazioni su 5 elementi. Calcolare $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^{-1} e β^{-1}.

3 — Siano $\alpha = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{5\,3\,4\,2\,1}$ e $\beta = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,1\,3\,5\,2}$ e $\gamma = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{1\,3\,2\,5\,4}$ tre permutazioni su 5 elementi. Calcolare $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, $\alpha^2 \circ \gamma$ e $\gamma \circ \alpha^{-1}$.

4 — Siano $\alpha = \binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$ e $\beta = \binom{1\,2\,3\,4}{1\,3\,2\,4}$ due permutazioni su 4 elementi. Calcolare $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\beta \circ \alpha^2$, $(\beta \circ \alpha)^2$ e $\alpha^3 \circ \beta \circ \alpha$.

5 — Siano $\alpha = (1\,3\,2\,5)$, $\beta = (1\,3)(4\,5)$ e $\gamma = (2\,3)(4\,5)$ tre permutazioni su 5 elementi. Calcolare $\beta \circ \alpha$, $\gamma \circ \alpha$, $\gamma \circ \beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta \circ \gamma$, $\beta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$.

Gruppi di trasformazioni

6 — Sia X un insieme finito, e sia G $(\neq \emptyset)$ un insieme di permutazioni di X. Dimostrare che la proprietà

(a) per ogni $f, g \in G$ *si ha* $f \circ g \in G$ *.*

implica le proprietà

(b) $\mathrm{id}_X \in G$,

(c) per ogni $f \in G$ *si ha* $f^{-1} \in G$ *.*

Dedurne che allora G è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{S}(G)$ delle permutazioni di X.

7 — Sia X un insieme, sia $A \subseteq X$, e siano $G_A := \big\{ f \in \mathcal{S}(X) \,\big|\, f(A) = A \big\}$, $G_{(A)} := \big\{ f \in \mathcal{S}(X) \,\big|\, f(a) = a \,, \ \forall\, a \in A \big\}$. Dimostrare che G_A e $G_{(A)}$ sono sottogruppi di $\mathcal{S}(X)$, e inoltre $G_{(A)} \subseteq G_A$.

8 — Sia X un insieme, e $A \subseteq X$. Sia $G_A := \{ f \in \mathcal{S}(X) \,|\, f(A) = A \}$ e $G_{(A)} := \{ f \in \mathcal{S}(X) \,|\, f(a) = a \,\forall\, a \in A \}$. Dimostrare che, se $|X| = n$ e $|A| = k$, allora $|G_A| = (n-k)!$ e $|G_{(A)}| = k!\,(n-k)!$.

9 — Sia X un insieme, e $A \subseteq X$. Siano $G_A := \{ f \in \mathcal{S}(X) \,|\, f(A) = A \}$ e $G_{(A)} := \{ f \in \mathcal{S}(X) \,|\, f(a) = a \,,\, \forall\, a \in A \}$. Dimostrare che

(a) $G_{X \setminus A} = G_A$.

(b) $G_{(A)} = G_A$ se e soltanto se $|A| = 1$.

(c) $G_{(A)} = \bigcap_{a \in A} G_a$.

10 — Sia X un insieme, e $A, B \subseteq X$. Siano G_A , $G_{(A)}$, G_B e $G_{(B)}$ definiti come nell'esercizio **9**. Dimostrare che

(a) $G_{(A \cup B)} = G_{(A)} \cap G_{(B)}$;

(b) $G_{(A)} \subseteq G_{(B)} \iff A \supseteq B$;

(c) $G_A \supseteq G_B \iff B = X$ oppure $B = \emptyset$ oppure $A = B$ oppure $A = X \setminus B$.

10 — Sia $\mathbb{P} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e sia

$$\mathcal{G} := \left\{ \varphi \in \mathbb{P}^{\mathbb{P}} \,\middle|\, \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R} : ad - bc \neq 0 \,,\, \varphi(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \;\forall\, x \in \mathbb{P} \right\} .$$

Verificare che $\mathcal{G}$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(\mathbb{P})$.

12 — Dati due insiemi X e Y, ed un'applicazione $h \in Y^X$, cioè $h : X \longrightarrow Y$, sia $G_h := \{ f \in \mathcal{S}(X) \,|\, h \circ f = h \}$. Dimostrare che G_h è un sottogruppo di $\mathcal{S}(X)$.

13 — Siano X, Y e Z tre insiemi, e siano $h \in Y^X$, $k \in Z^Y$. Con la notazione dell'esercizio **12**, dimostrare che

(a) $G_h \subseteq G_{k \circ h}$.

(b) se h è suriettiva, allora $G_{h \circ k} = G_h$ se e soltanto se k è iniettiva.

14 — Sia X un insieme, sia $A \subseteq X$, e sia $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ la funzione caratteristica di A . Con la notazione degli esercizi precedenti, dimostrare che $G_{\chi_A} = G_A$.

Gruppi e sottogruppi

15 — Sia $G := \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \neq 0 \}$ e sia $\circledast : G \times G \longrightarrow G$ l'operazione binaria in G definita da $(a, b) \circledast (\alpha, \beta) := (a\,\alpha,\, b\,\alpha + \beta)$. Dimostrare che $(G\,; \circledast)$ è un gruppo.

16 — Sia $\big(G\,;\circ\big)$ un gruppo. Dato $a \in G$, sia $\bullet_a : G \times G \longrightarrow G$ l'operazione binaria in G definita da $\gamma \bullet_a \eta := \gamma \circ a \circ \eta$ $(\forall\, \gamma,\, \eta \in G\,)$. Dimostrare che $\big(G\,;\bullet_a\big)$ è un gruppo.

17 — Sia $\big(G\,;\cdot\big)$ un insieme con un'operazione associativa. Supponiamo che esista $u \in G$ tale che $g\,u = g$ per ogni $g \in G$ (cioè u è un "elemento neutro a destra") e per ogni $g \in G$ esista $g' \in G$ tale che $g\,g' = u$ (cioè g^{-1} è un "inverso a destra" di g^{-1}). Dimostrare che $\big(G\,;\cdot\big)$ è un gruppo.

18 — Sia $\big(G\,;\cdot\big)$ un insieme *finito non vuoto* con un'operazione associativa tale che

$$\forall\ a, b \in G\,,\ \ \exists\ c_d, c_s \in G\ :\ a \cdot c_d = b\ ,\ \ c_s \cdot a = b$$

(cioè le "equazioni lineari" sono risolvibili). Dimostrare che $\big(G\,;\cdot\big)$ è un gruppo.

19 — Sia $\big(G\,;\cdot\big)$ un insieme *finito non vuoto* con un'operazione associativa tale che

$$\forall\ a, b, c \in G\,,\quad a \cdot c = a \cdot b \implies b = c\,,\qquad \text{e} \qquad c \cdot a = b \cdot a \implies b = c\,.$$

Dimostrare che $\big(G\,;\cdot\big)$ è un gruppo.

20 — Sia $\big(G\,;\cdot\big)$ un insieme *finito non vuoto* con un'operazione associativa tale che

$$\forall\ a, b, c \in G\,,\quad a \cdot c = a \cdot b \implies b = c\,,$$

oppure

$$\forall\ a, b, c \in G\,,\quad c \cdot a = b \cdot a \implies b = c\,.$$

Dimostrare che $\big(G\,;\cdot\big)$ è un gruppo. — **Controesempi:** $\big(\mathbb{N}\,;+\big)$ e $\big(\mathbb{N}_+\,;\cdot\big)$.

21 — Determinare tutti i sottogruppi del gruppo $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dei quaternioni.

22 — Dimostrare che se H è un sottogruppo di un gruppo G, allora l'unica classe laterale sinistra (o destra) di H in G che sia un sottogruppo è H stesso.

Gruppi ciclici

23 — Sia G un gruppo, e siano $x, y \in G$ tali che $xy = yx$ e $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, dove $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ indicano rispettivamente il sottogruppo di G generato da x e da y. Verificare che l'ordine di xy è il minimo comune multiplo degli ordini di x e di y.

24 — Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_6$, e la decomposizione di $\mathbb{Z}_6$ in classi laterali rispetto a ciascuno di essi.

25 — Sia G un gruppo ciclico con m elementi, e siano H e K due sottogruppi di G di ordine rispettivamente h e k. Determinare l'ordine di $H \cap K$.

26 — Sia G un gruppo ciclico di ordine n, e sia $m \in \mathbb{N}_+$ tale che $m \big| n$. Dimostrare che esiste uno ed un solo sottogruppo di G di ordine n.

27 — Sia G un gruppo ciclico di ordine n. Dimostrare che i generatori di G sono tanti quanti gli elementi dell'insieme $\left\{ d \in \mathbb{N} \,\middle|\, 0 < d < n \,,\, M.C.D.(d, n) = 1 \right\}$.

28 — Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, dimostrare che il gruppo $\mathcal{C}_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^n = 1 \right\}$ è un sottogruppo di $\big(\mathbb{C} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big)$, e che (come gruppo) è ciclico di ordine n.

29 — Determinare quali dei sottogruppi di $\mathcal{S}_3$ e di $\mathcal{S}_4$ siano ciclici.

Morfismi tra gruppi

30 — Verificare quali delle applicazioni da *(a)* a *(g)* siano dei morfismi (cioè rispettino le operazioni), e se lo sono se ne determini il nucleo e l'immagine.

(a) $\varphi : \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big)\,, \quad x \mapsto x^2\,,$

(b) $\varphi : \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big)\,, \quad x \mapsto 2^x\,,$

(c) $\varphi : \big(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \,;\, +\big) \longrightarrow \big(\mathbb{C} \,;\, +\big)\,, \quad (x, y) \mapsto i\,y\,,$

(d) $\varphi : \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, +\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R} \,;\, +\big)\,, \quad x \mapsto \frac{1}{x}\,,$

(e) $\varphi : \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R} \,;\, \cdot\,\big)\,, \quad x \mapsto \frac{1}{x}\,,$

(f) $\varphi : \big(\mathbb{R} \,;\, +\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R} \,;\, +\big)\,, \quad x \mapsto x\,|x|\,,$

(g) $\varphi : \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R} \,;\, \cdot\,\big)\,, \quad x \mapsto x^3\,.$

31 — Sia $n \in (2\mathbb{N}_+ + 1)$. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, sia $x * y := \sqrt[n]{x^n + y^n}$. Dimostrare che $(\mathbb{R}; *)$ è un gruppo isomorfo a $(\mathbb{R}; +)$.

32 — Calcolare i gruppi di automorfismi $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_6)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{11})$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

33 — Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G e $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ tale che $\alpha(H) = H$. Siano $C_G(H) := \{\, x \in G \,|\, xh = hx\, \forall\, h \in H \,\}$ e $N_G(H) := \{\, x \in G \,|\, xH = Hx \,\}$. Dimostrare che $\alpha\big(C_G(H)\big) = C_G(H)$ e $\alpha\big(N_G(H)\big) = N_G(H)$.

34 — Verificare quali delle applicazioni da *(a)* a *(e)* siano dei morfismi (cioè rispettino le operazioni), e se lo sono se ne determini il nucleo e l'immagine.

(a) $\varphi : \big(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,;+\big) \longrightarrow \big(\mathbb{C}\,;+\big)\,, \quad (x,y)\mapsto x+iy\,,$

(b) $\varphi : \big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;+\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;+\big)\,, \quad (x,y)\mapsto (x-y,x+y)\,,$

(c) $\varphi : \big(\mathbb{C}\,;+\big) \longrightarrow \big(\mathbb{C}\,;+\big)\,, \quad x+iy\mapsto x-iy\,,$

(d) $\varphi : \big(\mathbb{R}^3\,;+\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^3\,;+\big)\,, \quad (x,y,z)\mapsto (x,x+y,x+y+z)\,,$

(e) $\varphi : \big(\mathbb{R}^2\times\mathbb{Z}\times\mathbb{C}^3\,;+\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{C}^2\,;+\big)\,,$

$\big((r_1,r_2),z,(c_1,c_2,c_3)\big)\mapsto (2r_1-r_2,-3z,c_3-2c_1,c_2+4c_1-2c_3)\,.$

35 — Dimostrare che $\mathcal{S}_3 \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3)\,.$

36 — Dimostrare che $\big(\mathbb{Q}\,;+\big)$ non è isomorfo a $\big(\mathbb{Q}\setminus\{0\}\,;\cdot\big)\,.$

37 — Siano G_1 e G_2 due gruppi finiti. In ciascuna delle seguenti ipotesi

(a) $|G_1| = 41\,,\qquad |G_2| = 12$

(b) $|G_1| = 20\,,\qquad |G_2| = 50$

(c) $|G_1| = 36\,,\qquad |G_2| = 54$

può esistere un morfismo $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ *non banale* (cioè *non* tale che $\phi(g) = 1\ \forall\, g\in G_1$)? E può un tale morfismo essere iniettivo? Oppure suriettivo? In generale, quali sono le condizioni su $|G_1|$ e $|G_2|$ perché un tale morfismo possa esistere?

Sottogruppi normali, gruppi quozienti

38 — Sia H un sottogruppo di un gruppo G. Dimostrare che H è sottogruppo normale di G se e soltanto se $gHg^{-1} = H$ per ogni $g \in G\,.$

39 — Siano H e K due sottogruppi normali di un gruppo G tali che $H\cap K = \{1\}\,.$ Dimostrare che:

(a) $hk = kh$ per ogni $h\in H\,,\ k\in K\,;$

(b) $HK := \big\{\, hk \,\big|\, h\in H, k\in K\big\} = KH$ è sottogruppo normale di $G\,.$

40 — Sia G un gruppo, $H\leq G$ e $K\trianglelefteq G\,.$ Dimostrare che $H\cap K \trianglelefteq H\,.$

41 — Determinare tutti i gruppi G omomorfi a $\mathbb{Z}_4$, cioè tali che esista un epimorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_4 \twoheadrightarrow G\,.$

42 — Determinare tutti i possibili morfismi del gruppo di Klein nel gruppo $\mathcal{S}_3$.

43 — Sia G un gruppo, $H \trianglelefteq G$ e $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Dimostrare che $\alpha(H) \trianglelefteq G$.

44 — Sia G un gruppo, e $H \leq Z(G)$, dove $Z(G)$ indica il centro di G. Dimostrare che $H \trianglelefteq G$, e inoltre che, se il gruppo quoziente G/H è ciclico, allora G è abeliano.

45 — Determinare tutti i possibili morfismi di $\mathcal{S}_3$ nel gruppo di Klein.

46 — Verificare che tutti i sottogruppi del gruppo Q dei quaternioni sono normali.

47 — Sia G un gruppo, $H \leq G$ e $N_G(H) := \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}$. Dimostrare che:
(a) $N_G(H) \leq G$,
(b) $H \trianglelefteq N_G(H)$,
(c) se $H \trianglelefteq K \leq G$, allora $K \subseteq N_G(H)$,
(d) $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$.

48 — Sia G un gruppo, $H \trianglelefteq G$ e $|H| = 2$. Dimostrare che $H \subseteq Z(G)$.

49 — Determinare tutti i possibili morfismi del gruppo dei quaternioni Q nel gruppo di Klein.

50 — Sia $H := \big\{ \mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \big\} \; (\subseteq \mathcal{S}_4)$. Dimostrare che $H \trianglelefteq \mathcal{S}_4$.

51 — Determinare tutti i gruppi omomorfi al gruppo dei quaternioni Q, al gruppo di Klein K, a $\mathbb{Z}_8$, a $\mathbb{Z}_{12}$ e a $\mathbb{Z}_{13}$.

52 — Sia G un gruppo ciclico, e sia $H \trianglelefteq G$. Dimostrare che il gruppo quoziente G/H è ciclico.

53 — Determinare tutti i possibili morfismi del gruppo di Klein nel gruppo dei quaternioni Q.