

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 1

31 Gennaio 2005

1. Si dica se il polinomio $x^4 + 9x^3 - 12x^2 + 3$ è irriducibile su \mathbb{Q} .
2. Si consideri il seguente sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ed il seguente ideale di A

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} .$$

Provare che l'applicazione $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = c$$

è un omomorfismo di anelli, e che A/I è isomorfo ad \mathbb{R} .

3. Sia G un gruppo, e siano H e K due sottogruppi di G . Se l'ordine di H è primo con l'ordine di K , dimostrare che $H \cap K = \{u\}$, dove u è l'elemento neutro del gruppo G .