PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 1

19 Settembre 2005

1. Si fattorizzi in polinomi irriducibili rispettivamente su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, il polinomio

$$f(x) \;=\; x^5 + 3\,x^4 - x^3 - 3\,x^2 - 2\,x - 6$$

2. Si considerino le seguenti applicazioni dell'anello $\mathbb{Z}$ in sé:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, &\quad f(z) := |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z} \\ g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, &\quad g(z) := z + 1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si dica se si tratta di applicazioni suriettive e/o iniettive.
Si dica inoltre se si tratta di omomorfismi di anelli e, in caso positivo, se ne determini il nucleo.

3. Sia $\mathfrak{G}$ il gruppo di tutte le applicazioni della retta reale $\mathbb{R}$ in sé della forma

$$\varphi_{a,b} :\, x \mapsto a\,x + b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \big(\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\; b \in \mathbb{R} \,\big)$$

(a) Si dimostri che l'applicazione

$$\Psi :\, \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}\,, \qquad \varphi_{a,b} \mapsto \varphi_{a,0} \qquad\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,\; a \neq 0$$

è un omomorfismo del gruppo $\mathfrak{G}$ in sé.
(b) Si determinino il nucleo e l'immagine di Ψ.
(c) Si descriva esplicitamente l'isomorfismo

$$\Psi_* :\, \mathfrak{G} \Big/ Ker(\Psi) \xrightarrow{\;\cong\;} Im(\Psi)$$

dato dal Teorema Fondamentale di Omomorfismo.