

## Prova di Esame di Algebra 1

17 Febbraio 2010

1) Dimostrare che il polinomio

$$\frac{2}{15}x^5 + \frac{4}{5}x^4 - x^3 + \frac{6}{5}x^2 - 3x + \frac{1}{5}$$

è irriducibile nell'anello  $\mathbb{Q}[x]$ .

2) Si determinino i polinomi  $s(x)$  e  $t(x)$  in  $\mathbb{Q}[x]$  tali che

$$(x^2 + 1)s(x) + (x^3 - 2)t(x) = 2.$$

3) Sia

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

Dimostrare che  $G$  è un gruppo non abeliano rispetto al prodotto tra matrici.

Determinare l'ordine di  $G$  ed il periodo dei suoi elementi.

4) Sia  $G$  un gruppo e sia  $t$  un fissato elemento di  $G$ . Si definisca in  $G$  una nuova operazione  $*$  nel modo seguente:

$$a * b = atb.$$

Si provi che  $(G, *)$  è ancora un gruppo.