

## PROVA SCRITTA DI ALGEBRA I

15 Settembre 2010

1) Stiamo riordinando una biblioteca. Disponendo i libri in pile di 11, i libri che restano sono 4; disponendoli in pile di 13, i libri che restano sono 5; infine disponendoli in pile da 17, resta fuori solo un libro.

Sapendo che il numero complessivo dei libri è inferiore a 2500, determinare il numero esatto di libri presenti nella biblioteca.

2) Si determinino  $a, b \in \mathbb{Z}$  che soddisfino l'equazione

$$1440a + 336b = 144.$$

3) Determinare il sottogruppo  $H$  del gruppo  $G$  delle matrici reali invertibili  $2 \times 2$ , generato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dire inoltre a quale gruppo noto il sottogruppo  $H$  è isomorfo.

4) Sia  $R$  un anello e  $I \subset R$  un suo ideale bilatero. Si provi che  $R/I$  è commutativo se e solo se  $I$  contiene tutti gli elementi del tipo  $xy - yx$ , con  $x, y \in R$ .