

Prova Scritta di Algebra I

9 Giugno 2010

Esercizio 1

Sia R un anello commutativo e siano I e J due ideali di R .

Posto

$$H := \{x \in R \mid xj \in I, \forall j \in J\},$$

si provi che H è un ideale di R contenente I .

Esercizio 2

Sia

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Indicata con $+$ l'ordinaria addizione tra matrici, è noto che $(G, +)$ è un gruppo.

1. Se

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid a + d = 0 \right\},$$

si provi che T è un sottogruppo di G (normale).

2. Si provi che $G/T \simeq (\mathbb{Z}, +)$.

Esercizio 3

Si provi che per ogni intero $n \geq 3$, risulta

$$2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 8$$

Esercizio 4

Si fattorizzino in fattori irriducibili su \mathbb{Q} i seguenti polinomi:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x + 1; 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 1; x^4 + 2x^3 + x + 1.$$