ALGEBRA 1 — 2008/2009

Prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva anticipata — prova scritta del 9 Febbraio 2009

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente*, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] — Siano $n \in \mathbb{N}_+$, $E := \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$, e sia $\sim$ la relazione su E definita da

$$(x,y,z) \sim \big(x',y',z'\big) \iff \exists\, \sigma \in \mathcal{S}_n \,:\, \sigma(x) = x',\ \sigma(y) = y',\ \sigma(z) = z' .$$

(a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza;

(b) determinare la classe di equivalenza di $(1,1,1)$;

(c) descrivere l'insieme quoziente $E\big/\!\sim$.

[2] — Risolvere il sistema di congruenze lineari in $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 2\,x \equiv -11 & \pmod{5} \\ -x \equiv 13 & \pmod{8} \\ 12\,x \equiv 30 & \pmod{21} \end{cases}$$

(continua...)

[3] — Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, siano $\sigma, \rho \in \mathcal{S}_n$ gli elementi definiti nel modo seguente

$$\sigma(i) := n + 1 - i\,, \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, n\,,$$
$$\rho(i) := i + 1\,, \qquad \forall\ i = 1, 2, \dots, n - 1\,, \qquad\qquad \rho(n) := 1\,,$$

e sia $D_n := \big\langle \sigma, \rho \big\rangle$ il sottogruppo di $\mathcal{S}_n$ generato da σ e ρ.

(a) Dimostrare che $\sigma^2 = id$, $\rho^n = id$, $\sigma\,\rho\,\sigma = \rho^{-1}$;

(b) dimostrare che $\big|D_n\big| = 2\,n$;

(c) descrivere esplicitamente D_n, come sottogruppo di $\mathcal{S}_n$, nei casi di $n = 3, 4$.

[4] — Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, si determini l'eventuale risolubilità, ed in caso positivo si determini anche una soluzione, delle seguenti equazioni diofantee:

(a) $\qquad (2 - i\,) \cdot x + (3 + i\,) \cdot y \;=\; 1 + 2\,i$

(b) $\qquad (3 + i\,) \cdot x + (2 - 7\,i\,) \cdot y \;=\; 5 + 2\,i$

(c) Indicato con $I := \big(1 - 3\,i\,, 7 + 2\,i\,\big)$ l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $1-3\,i$ e da $7+2\,i$, determinare un elemento $t \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $I = \big(\,t\,\big)$, cioè t sia un (unico) generatore di I. Inoltre, si determinino $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ tali che

$$t \;=\; (1 - 3\,i) \cdot \alpha + (7 + 2\,i) \cdot \beta$$