Prova di Esame di Algebra 1

3 Febbraio 2010

1) Si determinino tutti i polinomi della forma $3x^2 + cx + 4$ che sono irriducibili su $\mathbb{Z}_5$.

2) Si risolva il seguente sistema di congruenze, scrivendo la soluzione generale

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 2 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \end{cases}$$

3) Sia A un anello commutativo unitario e $M_2(A)$ l'anello delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti in A. Per ogni $\alpha \in A$ poniamo

$$M_2(A, \alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y \\ \alpha y & x \end{pmatrix} \ \forall\, x, y \in A \right\}.$$

Provare che $M_2(A, \alpha)$ è un sottoanello commutativo unitario di $M_2(A)$ (che non è commutativo).

4) Sia G l'insieme delle applicazioni $\tau_{a,b}$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite da

$$\tau_{a,b}(x) = ax + b, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $a \neq 0$. Dimostrare che $(G, \circ)$ rispetto alla composizione di applicazioni è un gruppo.