

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva 2014–2015 — II appello
Esame scritto del 15 Luglio 2015

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.*

..... ★

[1] Determinare il resto di $N := 53407617^{85043175}$ nella divisione per 12.

[2] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 82x \equiv 155 \pmod{3} \\ -94x \equiv 78 \pmod{5} \end{cases}$$

[3] (a) Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tali che
 $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$.

(b) Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che
 $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_n = 4b_{n-1} - 9b_{n-2} \quad \forall n \geq 2$.

[4] Dimostrare — per induzione su $n \in \mathbb{N}$ — che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ vale l'identità

$$\binom{n+k}{2} = \binom{n}{2} + \binom{k}{2} + nk$$

(continua...)

[5] Sia $D_{90} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 90\}$ l'insieme dei numeri naturali divisori di 90, e sia $D_{90}^- := D_{90} \setminus \{2, 3, 90\}$. In entrambi gli insiemi, consideriamo la *relazione di divisibilità*, indicata con δ , cioè

$$b \delta a \iff \exists q \in \mathbb{N} : a = bq \quad \forall a, b \in D_{90} \quad \text{oppure} \quad a, b \in D_{90}^-$$

così che $(D_{90}; \delta)$ e $(D_{90}^-; \delta)$ sono insiemi ordinati.

Si risolvano i seguenti problemi considerando per ciascuno di essi *entrambi gli insiemi ordinati* $(X; \preceq) := (D_{90}; \delta)$ e $(X; \preceq) := (D_{90}^-; \delta)$.

(a) Esiste un *massimo* in $(X; \preceq)$? Esiste un *minimo* in $(X; \preceq)$? In entrambe le situazioni, in caso affermativo si specifichi chi sia tale massimo o minimo; in caso negativo invece si giustifichi la risposta.

(b) Esistono *elementi massimali* in $(X; \preceq)$? Esistono *elementi minimali* in $(X; \preceq)$? Se sì, quali sono? Se no, perché?

(c) Esistono in $(X; \preceq)$ degli *atomi*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

(d) Esistono in $(X; \preceq)$ degli *elementi \vee -irriducibili*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

(e) L'insieme ordinato $(X; \preceq)$ è un reticolo? Perché?

(f) L'insieme ordinato $(X; \preceq)$ è un'algebra di Boole? Perché?

(g) Esiste in $(X; \preceq)$ una \vee -fattorizzazione di 30 in fattori *\vee -irriducibili*? Se no, spiegare il perché. Se sì, calcolare esplicitamente una tale fattorizzazione.

(h) Esiste in $(X; \preceq)$ una \vee -fattorizzazione di 30 in *atomi*? Se no, spiegare il perché. Se sì, calcolare esplicitamente una tale fattorizzazione.