

Università di Roma Tor Vergata
Ingegneria Civile-Ambientale e Medica
TUTORATO 8 - 21 Novembre 2025

1. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^3 (con *prodotto scalare canonico*), generato dai vettori

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \quad \vec{v}_2 = (1, 1, -1)$$

- (a) Determinare una base e la dimensione di U . Determinarne le equazioni cartesiane.
 - (b) Calcolare $\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, ovvero il *prodotto vettoriale* tra \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .
 - (c) Trovare una base e la dimensione di U^\perp , ovvero del *complemento ortogonale* di U .
2. Siano $P = (0, -1)$ e $Q = (2, 2)$ due punti nello spazio euclideo bidimensionale.
- (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per P e *parallela* a $\vec{v} = (1, -3)$
 - (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta s passante per Q e perpendicolare ad r .
3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e siano $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, e $C = (-1, 0, k)$ punti nello spazio tridimensionale.
- (a) Determinare l'equazione cartesiana del *fascio di piani* passante per A , B e C .
 - (b) Trovare $k \in \mathbb{R}$ tale che l'area del triangolo di vertici A , B e C sia uguale a 1.
4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i piani di equazioni:

$$\pi_1 : 2x - y = 1, \quad \pi_2 : x + y + z = 0, \quad \pi_3 : x - 2z = 1.$$

- (a) Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
 - (b) Si trovi il piano π_4 passante per $P = (0, 0, 1)$ e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette di equazione:

$$r_1 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} 2x + z = -1 \\ (k+1)x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) Discutere la posizione reciproca di r_1 e r_2 al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- (b) Dire se esistono dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui r_1 e r_2 hanno direzioni ortogonali.