

**Università di Roma Tor Vergata**  
**Ingegneria Civile-Ambientale e Medica**  
 TUTORATO 8 - 21 Novembre 2025

1. Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  (con *prodotto scalare canonico*), generato dai vettori

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \quad \vec{v}_2 = (1, 1, -1)$$

- (a) Determinare una base e la dimensione di  $U$ . Determinarne le equazioni cartesiane.
  - (b) Calcolare  $\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ , ovvero il *prodotto vettoriale* tra  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .
  - (c) Trovare una base e la dimensione di  $U^\perp$ , ovvero del *complemento ortogonale* di  $U$ .
2. Siano  $P = (0, -1)$  e  $Q = (2, 2)$  due punti nello spazio euclideo bidimensionale.
- (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta  $r$  passante per  $P$  e *parallela* a  $\vec{v} = (1, -3)$
  - (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta  $s$  passante per  $Q$  e perpendicolare ad  $r$ .
3. Sia  $k \in \mathbb{R}$  e siano  $A = (0, -1, 0)$ ,  $B = (-2, 0, -3)$ , e  $C = (-1, 0, k)$  punti nello spazio tridimensionale.
- (a) Determinare l'equazione cartesiana del *fascio di piani* passante per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
  - (b) Trovare  $k \in \mathbb{R}$  tale che l'area del triangolo di vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$  sia uguale a 1.
4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i piani di equazioni:

$$\pi_1 : 2x - y = 1, \quad \pi_2 : x + y + z = 0, \quad \pi_3 : x - 2z = 1.$$

- (a) Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
  - (b) Si trovi il piano  $\pi_4$  passante per  $P = (0, 0, 1)$  e perpendicolare alla retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .
5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette di equazione:

$$r_1 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} 2x + z = -1 \\ (k+1)x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) Discutere la posizione reciproca di  $r_1$  e  $r_2$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
- (b) Dire se esistono dei valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $r_1$  e  $r_2$  hanno direzioni ortogonali.