

Università di Roma Tor Vergata
Ingegneria Civile-Ambientale-Medica
TUTORATO 5 - 31 Ottobre 2025

1. Si considerino i seguenti sottospazi (piani) in \mathbb{R}^3 :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$$

- (a) Determinare le *equazioni parametriche*, una base e la dimensione di U e di V .
 - (b) Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$. Di che *luogo geometrico* si tratta?
 - (c) Usare la *formula di Grassman*¹ per determinare la dimensione di $U + V$.
 - (d) Dire se U e V sono in *somma diretta*.
2. Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$U = \text{span}\{(1, 0, 0), (1, 2, 1)\}$$

$$V = \text{span}\{(0, 0, 1), (-3, 0, 0), (-3, 0, -3)\}$$

- (a) Determinare le *equazioni cartesiane*, una base e la dimensione di U e di V .
 - (b) Determinare una base e la dimensione di $U + V$.
 - (c) Determinare la dimensione di $U \cap V$.
3. Determinare la posizione reciproca (*parallele, incidenti o sghembe*) delle seguenti rette nello spazio.

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$s : \begin{cases} x = w \\ y = 2 \\ z = w + 2 \end{cases}, w \in \mathbb{R}$$

4. Nello spazio, sia r la retta parallela a $\vec{v} = (2, -1, 0)$ e passante per l'origine. Inoltre, sia s la retta di equazione cartesiana

$$s : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di r e s .

¹Ovvero, $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$