Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Civile-Ambientale-Medica

TUTORATO 3 - 17 Ottobre 2025

1. Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ due vettori linearmente indipendenti in V s.v. di $\dim(V) = 3$. Sia $\vec{w} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
   (a) Dire se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti.
   (b) Dire se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ è un sistema di generatori di $W = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, w\}$. Dire se è una base.
   (c) Dire se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ è un sistema di generatori di $W = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$. Dire se è una base.
   (d) Dire se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ è un sistema di generatori di V. Dire se è una base.

2. Sia $\mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali e siano
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calcolare $3A$, $A + B$, $A - 3B$.
   (b) Calcolare A^T, B^T, $(A+B)^T$. Dire quale matrice tra A e B è *simmetrica*, dire quale è *triangolare*.
   (c) Calcolare AB, BA. Osservare che $AB \neq BA$.
   (d) Calcolare $Tr(A)$, $Tr(B)$, $Tr(AB)$ e $Tr(BA)$, ovvero la *traccia*[1] di A,B, AB e BA.

3. Siano
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Dire se il prodotto AB è compatibile. In caso positivo, calcolarlo.
   (b) Dire se il prodotto BA è compatibile. In caso positivo, calcolarlo.
   (c) Dire se i prodotti AX e BY sono compatibili e in caso calcolarli.

4. Data le matrice $M \in M_{2,3}(\mathbb{R})$
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Scrivere il *sistema lineare omogeneo* $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ associato ad M.
   (b) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due soluzioni di $M\mathbf{x} = 0$. Dire se $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è una soluzione di $M\mathbf{x} = 0$. Dire se $\lambda\mathbf{x}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ è una soluzione di $M\mathbf{x} = 0$. Dedurre che $Sol(M\mathbf{x} = \mathbf{0})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

5. Sia $\mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 e sia
$$M = \begin{bmatrix} 3 & t \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ M è *invertibile*.
   (b) Sia $t = 1$, calcolare M^{-1}
   (c) Sia $t = 1$, calcolare $(M^T)^{-1}$, osservare che $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$

6. Determinare il rango (per righe e per colonne) delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

[1] Si ricorda che $Tr(M)$ è uguale alla somma degli elementi diagonali di una matrice M.