Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Civile-Ambientale e Medica

TUTORATO 10 - 12 Dicembre 2025

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x + y,\, 2x,\, x - y)$
   (a) Verificare che f è una applicazione lineare.
   (b) Dimonstrare che $g(x, y) = (x, x^2 + y^2)$ non è una applicazione lineare.
   (c) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (d) Dire se f è iniettiva e/o surriettiva. Dire se è *biettiva*.
   (e) Determinare la matrice A associata a f (rispetto alle basi canoniche).
   (f) Determinare $f(1, 2)$ tramite la definizione e tramite la matrice A.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$ nel seguente modo:

$$f(\vec{e}_1) = (0, 2, 1), \quad f(\vec{e}_2) = (2, 0, -1) \quad f(\vec{e}_3) = (2, 2, 0).$$

   (a) Esplicitare $f(x, y)$
   (b) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (c) Dire se f è iniettiva e/o surriettiva. Dire se è biettiva.
   (d) Determinare la matrice A associata a f (rispetto alle basi canoniche).
   (e) Stabilire se $(4, 4, 0)$ appartiene a $Im(f)$. In caso positivo, determinare la sua *antimmagine*[1].

3. Si consideri il seguente *endomorfismo* di $\mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z, w) = (-x + z, 2y, x - 2z, w)$$

   (a) Determinare la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (b) Stabilire se f è invertibile e, in caso lo sia, determinare f^{-1}.

4. Sia $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, x + y + z, 2x - 3y - z)$$

   (a) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
   (b) Si scriva $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)$, la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica di codominio.
   (c) Si scriva $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f)$, la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio

[1] Ricorda che, se $f : V \to W$ è lineare, allora l'antimmagine di $\vec{w} \in W$ è l'insieme $f^{-1}(\vec{w}) = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{w}\}$.