GEOMETRIA (Ing. Civile-Ambientale-Medica) 2025/2026
Canali (A-L) e (M-Z) - Proff. Flamini-Pareschi-Trapani - APPELLO 2

COGNOME .... NOME..................

Civile-Ambientale......... Medica.........

Risolvere gli esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni CHIARE ed ESSENZIALI.

Esercizio 1 Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano dati i punti P, Q, R di coordinate, rispettivamente,

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ parametro reale.

Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ (se esistono) i tre punti punti P, Q, R sono non allineati. Per tali eventuali valori di a, calcolare in funzione del parametro a l'area del triangolo di vertici i punti P, Q, R. (Ricordare che sia l'allineamento di punti in $\mathbb{R}^3$ che l'area del triangolo non cambiano se si applicano delle traslazioni in $\mathbb{R}^3$; ricordare inoltre che per il calcolo di aree si puo' usare anche il determinante).

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ dotato di prodotto scalare standard (equivalentemente, canonico) $\cdot$, sia dato il sottospazio

$$W = Span\left\{ \overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\},$$

dove i vettori sono scritti in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Determinare $\dim(W)$ ed estrarre una base di W dal sistema di generatori $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio W.

Trovare equazioni cartesiane del sottospazio $U = Span\{\overline{w}_1\}$. Detto poi $U^\perp \subset \mathbb{R}^4$ il *complemento ortogonale* di U in $\mathbb{R}^4$ (cioe' il sottospazio dei vettori di $\mathbb{R}^4$ che sono ortogonali al sottospazio U) determinare $\dim(W \cap U^\perp)$.

Esercizio 3 Sia $\mathbb{R}^2$ spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare standard (equivalentemente, canonico) $\cdot$ e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita sui vettori della base canonica $\mathcal{E} := \{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2\}$ in questo modo:

$$F(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_2, \quad F(\overline{e}_2) = -2\overline{e}_1 + \overline{e}_2.$$

Verificare che $\overline{b} := 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 \in \mathrm{Im}(F)$ e determinare dimensione ed equazioni cartesiane del sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$ determinato dalle controimmagini di $\overline{b}$, cioè del sottospazio affine

$$\overleftarrow{F}(\overline{b}) := \{\overline{v} \in \mathbb{R}^2 \mid F(\overline{v}) = \overline{b}\}.$$

In seguito, giustificare perche' F e' un'applicazione lineare (od operatore) diagonalizzabile e trovare una base ortonormale $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^2$ in cui F si rappresenti in forma diagonale (cioe' in cui la matrice rappresentativa di F in base $\mathcal{O}$ risulti essere una matrice diagonale).

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito di prodotto scalare standard (equivalentemente, canonico) $\cdot$ e base canonica $\mathcal{E}$, sia dato il sottospazio vettoriale $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, di equazione cartesiana $x + y + z = 0$. Sia data la base di Π

$$\mathcal{V} = \left\{ \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

e sia $\mathcal{W} = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ l'ortonormalizzata di Gram-Schmidt della base $\mathcal{V} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ rispetto al prodotto scalare standard/canonico $\cdot$.

(1) Determinare i vettori $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, cioe' esprimerli in coordinate in base $\mathcal{E}$

(2) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ i cui primi due vettori siano $\overline{w}_1, \overline{w}_2$

(3) Determinare una *isometria lineare* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che mandi il sottospazio di equazione cartesiana $z = 0$ nel sottospazio Π

(4) Calcolare l'immagine mediante F del vettore $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Svolgimento 1

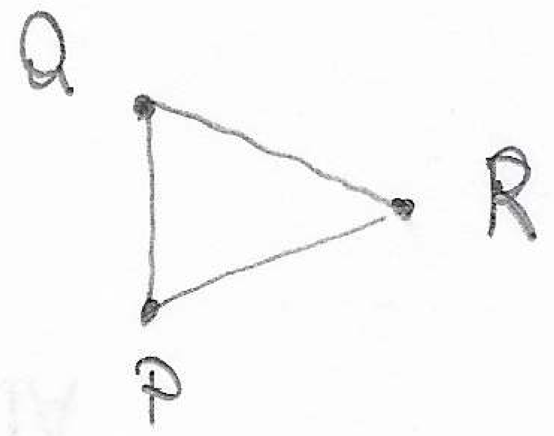
$\vec{v} := \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{w} := \overrightarrow{PR} = R - P = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ora P, Q, R allineati $\Leftrightarrow$ $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a = 2\alpha \\ 2 = \alpha \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4$$

Perciò per $a \neq 4$, P, Q e R NON ALLINEATI

Area triangolo



Notare che i 3 punti giacciono sul piano $z = 5$

se trasliamo questo piano in $z = 0$ troviamo punti

$$P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R' = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che formano un triangolo congruente a $P\hat{Q}R$

Quindi $P'\hat{Q}'R'$ ha stessa area di $P\hat{Q}R$

Solo che P', Q', R' vivono su $z = 0$ e si possono identificare

a punti in $\mathbb{R}^2$ dato da $z = 0$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R' = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \end{pmatrix} \quad a \neq 4$$

$\boxed{\text{I modo}}$ (con uso di determinante)

$\vec{v}' = \overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{w}' = \overrightarrow{P'R'} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ area $= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| =$

$= \frac{1}{2} |4 - a|$

$\boxed{\text{II modo}}$ (con geometria euclidea in $\mathbb{R}^2$)

$\text{lung}(\overline{P'Q'}) = \|P'Q'\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = b \rightarrow$ base

$h =$ altezza $= d\,(R', \text{retta per } P' \text{ e } Q')$

Ora retta per P' e Q' è $r: x - 2y - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $d\,(R', r) = \dfrac{|(1+a) - 4 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{|a-4|}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ area $= \dfrac{1}{2}\, b \cdot h = \dfrac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \dfrac{|a-4|}{\sqrt{5}}$

Svolgimento 2

$$A = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{poiché } \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$\text{Ma } \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Infatti $\overline{w}_3 = 3\overline{w}_1 + 2\overline{w}_2$

Perciò $\boxed{\dim(W) = 2}$ e $\boxed{\mathcal{B}_W = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}}$

Eq. parametriche di W

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t + s \\ x_3 = t - s \\ x_4 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = -s \\ x_2 - x_4 = s \\ x_4 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = x_4 - x_2 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$ Eq. cartesiane di W

Siccome $U = \mathrm{Span}\{\overline{w}_1\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 2\alpha \end{cases}$ è retta vettoriale cioè $\boxed{\dim(U) = 1}$

$\Rightarrow U$ ha 3 equazioni cartesiane, ad esempio

$$U: \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$ eq. cartesiane di U

Poiché $\dim(U) = 1 \Rightarrow \dim(U^\perp) = 4 - 1 = 3 \Rightarrow U^\perp$ è iperpiano in $\mathbb{R}^4$.

Poiché $\overline{w}_1 \in W$ ma $\overline{w}_1 \in U$ quindi $\overline{w}_1 \notin U^\perp \Rightarrow$

$\dim(W \cap U^\perp) < \dim(W) = 2$

Ora $U^\perp$ ha equazione cartesiana $1x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow$

$$U^\perp \cap W: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$ Visto che il sistema ha rango 3 $\Rightarrow \boxed{\dim(W \cap U^\perp) = 1}$

Svolgimento 3

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} := A$$

Poiché simmetrica e $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}, \cdot)$ euclideo, per Teorema spettrale operatori autoaggiunti $\Rightarrow$ F è autoaggiunto dunque diagonalizzabile

$\det(M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)) = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow$ F è automorfismo di $\mathbb{R}^2$

cioè F è sicuramente suriettiva $\Rightarrow \bar{b} \in \operatorname{Im}(F)$

$$\overleftarrow{F}(\bar{b}) = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{v}) = \bar{b}\} \Leftrightarrow$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -\frac{7}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \end{matrix}}$$

$\boxed{\dim(\overleftarrow{F}(\bar{b})) = 0}$ perché è il punto

$P = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ e le sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$V_3(A) = \ker(A - 3I_2) = \left\{\begin{matrix} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{matrix}\right\} = \{x + y = 0\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{u}_1\right\}$$

Per Teorema spettrale

$$V_{-1}(A) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{u}_2\right\} \text{ e}$$

un base $\mathcal{D} := \left\{\bar{f}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}, \bar{f}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$

si ottiene $M_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

svolgimento 4

(1) Ortogonalizzazione di v: uso Gram-Schmidt

$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \Rightarrow$ è sufficiente normalizzare i vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2$

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\|\bar{v}_1\|}\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2\|}\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

(2) basta completare con

$$\bar{w}_3 = \bar{w}_1 \times \bar{w}_2 = \begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(3) Poiché $z=0$ è Span$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ mentre

Π: Span$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ = Span$\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$

Posta $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^3} = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\} \Rightarrow$

$$M := M_{\mathcal{E},\mathcal{O}} = \left(\bar{w}_1 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{w}_3\right) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

è matrice ortogonale $\Rightarrow M_{\mathcal{E},\mathcal{O}}$ corrisponde alla isometria cercata visto che $M(\bar{e}_1) = \bar{w}_1$, $M(\bar{e}_2) = \bar{w}_2$

$\Rightarrow \{z=0\} \xrightarrow{M} \Pi$ perciò $F = F_M$

(4)
$$F(u) = M \circ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$