

GEOMETRIA (Ing. Civile-Ambientale-Medica) 2025/2026
Canali (A-L) e (M-Z) - Proff. Flamini-Pareschi-Trapani - APPELLO 1

COGNOME

NOME.....

Civile-Ambientale.....

Medica.....

Risolvere gli esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni CHIARE ed ESSENZIALI.

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2x + y + az = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Determinare se esistono valori del parametro a per cui il sistema non abbia soluzione; determinare se esistono valori del parametro a per cui il sistema ammetta una ed una sola soluzione; determinare se esistono valori del parametro a per cui il sistema ammetta infinite soluzioni.

Fissato infine un valore del parametro a (se esiste) per cui esistono infinite soluzioni, scrivere per quel valore prima equazioni cartesiane del sottospazio affine costituito dalle soluzioni del sistema lineare associato ed in seguito equazioni parametriche dello stesso sottospazio affine.

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano dati i sottospazi vettoriali $V := \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ e $W := \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la dimensione ed una base di V ; determinare la dimensione ed una base di W ; provare che $w_1 \notin V$, $w_1 + w_2 \in V$ e $w_1 + w_3 \in V$.

Calcolare $\dim(V + W)$ e $\dim(V \cap W)$. Determinare infine una base di $V + W$ ed una base di $V \cap W$.

Esercizio 3 Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, prendiamo i punti che, rispetto al riferimento dato, hanno coordinate

$$P_1 = (1, 0, -1), P_2 = (1, -1, 0); P_3 = (-1, 2, -1), P_4 = (-1, -1, 2).$$

Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche del sottospazio affine $\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ che, tra tutti i sottospazi affini contenenti i punti P_1, P_2, P_3, P_4 , sia quello di dimensione minima.

Dopo aver stabilito che il punto $Q = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ non appartiene ad α , determinare equazioni parametriche della retta r passante per Q e perpendicolare ad α .

Determinare infine le coordinate del punto $H := r \cap \alpha$ e la distanza $d(Q, H)$.

Esercizio 4 Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali e nell'indeterminata x e sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2. Sia $F : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ l'applicazione lineare che associa ad ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ il polinomio

$$F(p(x)) := x \cdot p''(x) + p(0),$$

dove $p''(x)$ denota la *derivata seconda* del polinomio $p(x)$.

Dimostrare che $F(V) \subseteq V$. Considerata in seguito l'applicazione lineare $F|_V : V \rightarrow V$, restrizione di F al sottospazio V , trovare la matrice rappresentativa di $F|_V$ rispetto alla base $\mathcal{B}_V := \{1 - x, 1 + x, x + x^2\}$ di V .

Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $\text{Ker}(F|_V) \subset V$. Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $\text{Im}(F|_V) \subset V$.

Stabilire infine se $F|_V$ è diagonalizzabile.

Svolgimento 1

①

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R} \text{ parametro}$$

$$\Rightarrow \det(A) = a - 2$$

• Se $a \neq 2$ $\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ compatibile con unica soluzione

• Se $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \quad \text{e} \quad \bar{b} = 2 \quad C_1^A = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

perciò $\bar{b} \in \text{Im}(A)$ cioè $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\bar{b}) = 2$
 sistema compatibile con soluzioni dipendenti che
 $n - \text{rg}(A|\bar{b})$ parametri cioè $3 - 2 = 1$ 1 parametro libero $\Rightarrow \infty^1$ soluzioni

• Non esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il sistema sia incompattibile

• Poiché l'unico caso in cui esistono infinite soluzioni è per $a = 2$
 $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ è equivalente a

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{eq. cartesiane} \\ \text{sottospazio affine} \end{array}$$

Ponendo $z = t \Rightarrow x = 2 - t$ perciò $\text{Sol}(A \cdot \bar{x} = \bar{b})$ è
 una retta affine di eq. parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eq. parametriche
sottospazio affine

Svolgimento 2

①

• $V = \text{Span} \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ e $\text{rg} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \boxed{\dim(V) = 3}$
 e $\boxed{B_V = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}}$
 $\hookrightarrow$ sotto matrice con $\det = 1$

• $W = \text{Span} \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \}$ e $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$ visto che
 $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Laplace}}{\underset{\text{rispetto I colonne}}{=}} -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1(4-2) = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{\dim(W) = 3 \text{ e } B_W = \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \}}$

• Ora V è iperpiano di $\mathbb{R}^4$ la cui equazione cartesiana è data da:

$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{V: x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0}$

Poiché $\bar{w}_1$ NON SODDISFA l'equazione di $V \Rightarrow \boxed{\bar{w}_1 \notin V}$

Invece $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ visto che soddisfa equazione di V
 $\bar{w}_1 + \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$ " " " " "

$\dim(V \cap W) = ?$

$\alpha \bar{w}_1 + \beta \bar{w}_2 + \gamma \bar{w}_3 \in V \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ 2\beta + 2\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \beta + 2\gamma \end{pmatrix} \in V$

$\Leftrightarrow$ soddisfa eq. cartesiana di V

$(\alpha + \gamma) - (2\beta + 2\gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) - (\beta + 2\gamma) = 0$

$2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$

$\Leftrightarrow (\beta + \gamma) \bar{w}_1 + \beta \bar{w}_2 + \gamma \bar{w}_3 \in V \Leftrightarrow \beta(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) + \gamma(\bar{w}_1 + \bar{w}_3) \in V$

$\Rightarrow \boxed{V \cap W = \text{Span} \{ \bar{w}_1 + \bar{w}_2, \bar{w}_1 + \bar{w}_3 \}} \Rightarrow \boxed{\dim(V \cap W) = 2}$

Per la formula di Grassmann

(2)

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{V+W = \mathbb{R}^4} \text{ (ma la somma NON \acute{E} DIRETTA)}$$

$$\boxed{B_{V \cap W} = \{ \bar{w}_1 + \bar{w}_2, \bar{w}_1 + \bar{w}_3 \}}$$

da prima

$$\boxed{B_{V+W} = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{w}_1 \}}$$

visto che $\bar{w}_1 \notin V$, si

completa B_V con il vettore $\bar{w}_1$.

Svolgimento 3

• Notiamo che i vettori

$$\vec{v}_1 := \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \overrightarrow{P_1 P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti perché $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 - (-4 + 6) = 0$

Perciò $\dim(\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}) = \dim(\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}) = 2$

Perciò α è UN PIANO in $\mathbb{R}^3$

Anzi. α è il piano che passa ad esempio per P_1 e con
giacitura $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Perciò

Eq. parametriche di α $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1 + s \vec{v}_1 + t \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $s, t \in \mathbb{R}$

quindi

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -s + 2t \\ z = -1 + s \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Eq. cartesiane di α ad esempio $\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$

$$\alpha: x + y + z = 0$$

• Notiamo che $Q = (1, 1, 1) \notin \alpha$ perché le coordinate non soddisfanno l'equazione cartesiana di α

un vettore normale ad α è $\vec{m}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Perciò la retta r passa per Q e ha vettore direttore $\vec{m}_\alpha$.

$\Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ eq. parametriche di r $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

On $r \cap \alpha = H$: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

$\Leftrightarrow (1+t) + (1+t) + (1+t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Perciò $H = (0, 0, 0) = O$ e $d(Q, H) = d(Q, O) = \|\vec{OQ}\| = \sqrt{3}$

Svolgimento 4

• Nota mo che

$$\bullet (\alpha p(x) + \beta q(x))'' = \alpha p''(x) + \beta q''(x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall p(x), q(x) \in V^{(1)}$$

$$\bullet x \cdot (\alpha p(x) + \beta q(x))'' = \alpha (x \cdot p''(x)) + \beta (x \cdot q''(x))$$

$$\bullet (p+q)(0) = p(0) + q(0)$$

Siccome F è composizione di applicazioni lineari $\Rightarrow F$ è lineare

$$\bullet \text{ Poiché } p(x) \in V \Rightarrow \deg(p(x)) \leq 2 \Rightarrow \deg(F(p(x))) \leq 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow \text{Im}(F|_V) \subseteq V \Rightarrow F|_V \in \text{Emol}(V)$$

• La base B_V è $B_V = \{1-x, 1+x, x+x^2\}$ allora

$$F(1-x) = x \cdot (1-x)'' + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$F(1+x) = x \cdot (1+x)'' + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$F(x+x^2) = x \cdot (x+x^2)'' + 0 = x \cdot 2 + 0 = 2x$$

Per trovare $M_{B_V, B_V}(F)$ devo scrivere i polinomi 1 e $2x$ come
Combinazioni lineari degli elementi di $B \Rightarrow$

$$1 = \alpha(1-x) + \beta(1+x) + \gamma(x+x^2) = (\alpha+\beta)1 + (\beta-\alpha)x + \gamma x^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta - \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

cioè

$$1 = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) + 0(x+x^2)$$

Allo stesso modo

$$2x = (\alpha+\beta)1 + (\beta-\alpha)x + \gamma x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - \alpha = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

che dà

$$2x = -1(1-x) + 1(1+x) + 0(x+x^2)$$

Perciò

$$A := M_{B_V, B_V}(F) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma allora

$$\dim(\text{Im}(F|_V)) = \text{rg}(A) = 2$$

$$\text{e } \dim \text{Ker}(F|_V) = \dim(V) - \text{rg}(A) = 3 - 2 = 1$$

Teorema di Nullità e Rango

$$\text{Ker}(F_V): A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 x_1 + 1/2 x_2 - x_3 = 0 \\ 1/2 x_1 + 1/2 x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

equivalente a $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ cioè $\boxed{\text{Ker}(F_V) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$

che vuol dire $\text{Ker}(F_V) = \text{Span}\{1(1-x) - 1(1+x)\} = \text{Span}\{-2x\} = \text{Span}\{x\}$

$$\boxed{\text{Ker}(F_V) = \text{Span}\{x\}} \Rightarrow \boxed{B_{\text{Ker}(F_V)} = \{x\}}$$

Inverce $\text{Im}(F_V) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x), -(1-x) + 1(1+x)\right\}$
 $= \text{Span}\{1, 2x\} = \text{Span}\{1, x\} \Rightarrow \boxed{B_{\text{Im}(F_V)} = \{1, x\}}$

• Per concludere

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III riga}]{\text{Laplace}} -\lambda \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = -\lambda^2(\lambda + 1)$$

Per $\lambda = 0$ $m_a(0) = \{\text{molteplicità algebrica di } \lambda = 0\} = 2$
ma $m_g(0) = \{\text{molteplicità geometrica di } \lambda = 0\} = 1 = \dim(\text{Ker}(F_V))$

Poiché $1 = m_g(0) < m_a(0) = 2 \Rightarrow \boxed{F_V \text{ non diagonalizzabile}}$