

Svolgimento esercizio 1

(i) Poiché $\bar{v} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ e $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le coordinate di $\bar{v}$ in base $\mathcal{E}$ non soddisfano equazione cartesiana omogenea del ssp. U

(*) $U: x + 2y = 0$ eq. cartesiana di U

Quindi $\bar{v} \notin U$

Poiché matrice del sistema omogeneo è $A = (1 \ 2) \in M(1 \times 2)$

con $\text{rg}(A) = 1 \Rightarrow \dim(U) = n - \text{rg}(A) = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow U$ è una retta vettoriale (cioè ssp. vettoriale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1)

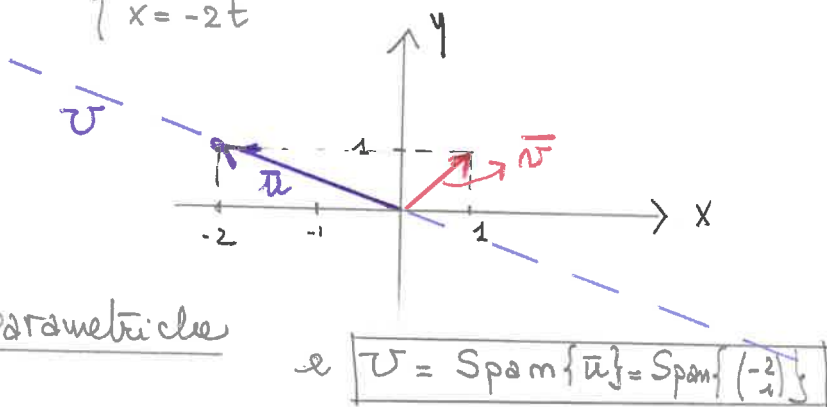
$P_U(\bar{v}) =$ proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su U = ?

Sodà $U = \text{Span}\{\bar{u}\}$, dove $\bar{u}$ lo determino risolvendo (*)

$x + 2y = 0 \xrightarrow{\text{già a scala}} \begin{cases} y = t \\ x = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$ equazioni parametriche di U



$\Rightarrow P_U(\bar{v}) = a \cdot \bar{u}$ per def. di proiezione su U

Devo determinare a

Ma per regola parallelogramma

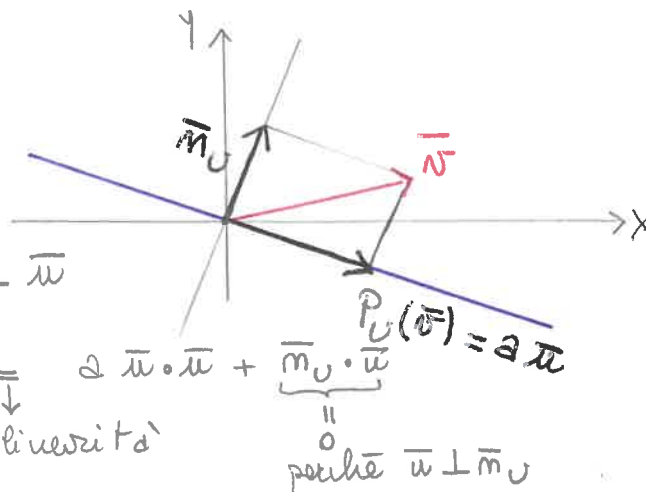
cioè

$\bar{v} = a\bar{u} + \bar{m}_U$ con $\bar{m}_U \perp \bar{u}$

$\Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{u} = (a\bar{u} + \bar{m}_U) \cdot \bar{u} \stackrel{\text{bilinearità}}{=} a\bar{u} \cdot \bar{u} + \underbrace{\bar{m}_U \cdot \bar{u}}_{=0 \text{ poichè } \bar{u} \perp \bar{m}_U} = a\bar{u} \cdot \bar{u}$

$\Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{u} = a\bar{u} \cdot \bar{u}$

$\Rightarrow a = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|^2}$



Percio'

(2)

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 1 = -1$$

$\downarrow$ prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$
 $\downarrow$ prodotto righe per colonne tra matrici

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = \|\bar{u}\|^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2)^2 + (1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{P_U(\bar{v}) = -\frac{1}{5} \bar{u} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$

(ii) Da Cauchy-Schwarz

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos(\widehat{\bar{u}\bar{v}})$$

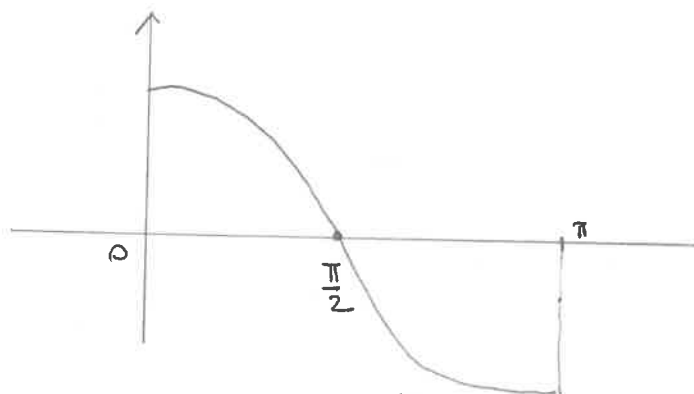
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u} = -1$$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{5}$$

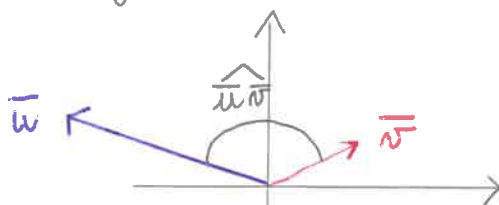
$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\widehat{\bar{u}\bar{v}}) = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

Ricordo



$\cos(\widehat{\bar{u}\bar{v}}) = -\frac{1}{\sqrt{10}} < 0 \Rightarrow \widehat{\bar{u}\bar{v}}$ è un angolo compreso, maggiore di $\frac{\pi}{2}$ come si evince dal disegno



$$(iii) B_U = \{\bar{u}\} \Rightarrow \mathcal{O}_U = \left\{ \bar{f} := \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$(iv) Poiché \bar{f} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cerco un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, t.c. $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & \leftarrow \text{versore} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0 & \leftarrow \text{ortogonale a } \bar{f} \end{cases}$

Ma allora semplicemente

(3)

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{p}^\perp = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ +\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ è ciò che cerco}$$

Notare che

$$U: \underline{1}x + \underline{2}y = 0$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{n}, \vec{p}$$

$$\text{e } \frac{\vec{m}}{\|\vec{m}\|} = \vec{p}^\perp$$

(v) $P = (2, 5)$ punto di $\mathbb{R}^2$

$P \notin U$ perché $(2) + 2(5) \neq 0$ cioè le coord. di P non soddisfano equazione cartesiana di U

$$\text{Siccome } U = \{x + 2y = 0\} = \text{Span}\{\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

r : Retta // a U per P

* Eq. parametriche; la sua direzione è $U \Rightarrow \vec{u}$ è un vettore direttore della retta che cerco

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P + \text{Span}\{\vec{u}\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{eq. parametriche } r$$

* Eq. cartesiane 1° modo: elimino t dalle precedenti eq. parametriche (singo e possibili) (errore conto)

2° modo fascio di rette improprie

r deve avere come direzione $U \Rightarrow r: x + 2y = c$

c da determinare $\Rightarrow$ impongo passaggio per $P = (2, 5)$

$$2 + 10 = c$$

$$r: x + 2y = 12$$

3° modo

$$\vec{x} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ proporzionale a } \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\text{eq } \begin{pmatrix} x-2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \text{det} \begin{pmatrix} x-2 & y-5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2) - (-2(y-5)) = 0$$

$$x - 2 + 2(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow \boxed{l: x + 2y = 12}$$

(4)

(vi) l : retta per P e $\perp$ a U

* Eq. parametriche l

Poiché $U = \text{Span} \left\{ \bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $U: x + 2y = 0$

Un vettore $\bar{m} \perp U$ e t.c. $\bar{m} \cdot \bar{u} = 0$

Ma sono i coefficienti di eq. cartesiana di U

$$\underline{1}x + \underline{2}y = 0 \Rightarrow \bar{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Perciò

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \bar{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{eq. parametriche } l,$$

* Equazione cartesiana l

1° modo eliminando t dalle precedenti

2° modo poiché $l \perp U \Rightarrow \bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ devono costituire i coefficienti di l

$$-2x + 1y = c$$

Passaggio per $P = (2, 5)$

$$-4 + 5 = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow l: -2x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l: 2x - y = -1}$$

3° modo $\overrightarrow{X - OP}$ proporzionale a $\bar{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{reg} \begin{pmatrix} x-2 & y-5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x-2 & y-5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2(x-2) - (y-5) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 4 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l: 2x - y = -1}$$

(vii) $d(P, U)$

5

$$P = (2, 5) \notin U$$

$d(P, U)$ = distanza tra P e H , H proiezione perpendicolare di retta U da P

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\|n\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 0|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5} \sqrt{5}$$

Svolgimento Esercizio 2

$$(i) \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \right\} \rightarrow \begin{matrix} z = s \\ y = t \\ x = -t \end{matrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$U = \text{Span} \left\{ \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\dim(U) = 2}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\} \rightarrow \begin{matrix} z = s \\ y = t \\ x = -2t + s \end{matrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$W = \text{Span} \left\{ \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\dim(W) = 2}$$

$$U + W = \text{Span} \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2 \}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{w}_2$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$
 $\text{e } \text{rg}(A) \leq \min \{3, 4\} = 3$

Kronecker

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} 0 + 0 + 1 - (0 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \text{ e } \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1 \} \text{ L. Indip.} \Rightarrow \text{base di } \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$$

Ma $\dim(U) = 2$ e $\dim(W) = 2$

(Per chi l'ha vista)

Formula di Grassmann

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 3 2 2

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 1 \Rightarrow U+W$ non è somma diretta

Altrimenti

$$U \cap W: \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\det = 2 - 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 \Rightarrow \dim(U \cap W) = n - \operatorname{rg}(A) = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow U \cap W$ è retta vettoriale $\Rightarrow U+W$ non è somma diretta

Infatti ad esempio

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\{x+y=0\}$ $\{x+2y-z=0\}$ $\{x+y=0\}$ $\{x+2y-z=0\}$
 U W U W

(ii) Affinchè

$\mathbb{R}^3 = U \oplus Z \Rightarrow \dim(Z) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U) = 1$

$\Rightarrow Z = \operatorname{Span}\{\vec{z}\}$ retta in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow Z = \operatorname{Span}\{\vec{z}\}$

Però cerco più in particolare $Z \perp U$ cioè

$\forall t \cdot \vec{z} \perp t \cdot \vec{u} \quad (t \cdot \vec{z}) \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall \vec{u} \in U$

Poichè $U: x+y=0 \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in t.c.$

$\vec{m} \perp U \Rightarrow Z = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus Z$$

(7)

Ora

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in Z} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ t + a = 1 \\ t - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

cioè $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in Z}$ modul unico

(iii) $P = (1, 1, 1) \neq Q = (1, 2, 3)$

$$\vec{n}_r = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

re: retta per P con vettore direttore $\vec{n}_r$ (potremmo pure $\vec{Q}$ e $\forall a \cdot \vec{n}_r, a \neq 0$)

$$\bar{X} = P + \text{Span}(\vec{n}_r) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 1$$

$$y = 1 + t$$

$$z = 1 + 2t$$

eq. param. re

Eq cartesiane poiché $\dim(r) = 1$ e $n = 3 \Rightarrow n - \text{rg}(A) = 1$
 $\Rightarrow$ cerco $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ con $\text{rg}(A) = 2 \Rightarrow 2$ eq. cartesiane

1° modo elimino t (lungo e errori conto)

2° modo

$\bar{x} - \overrightarrow{OP}$ e $\vec{n}_r$ proporzionali $\Leftrightarrow$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$\downarrow$
 $\text{rg sottomatrici} = 1$

$\Rightarrow$ Kronecker: solo 1 e impongo $\det 2 \times 2 = 0$

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} y-1 & z-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1-(z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \boxed{r: \begin{cases} x=1 \\ y-z=0 \end{cases}}$$

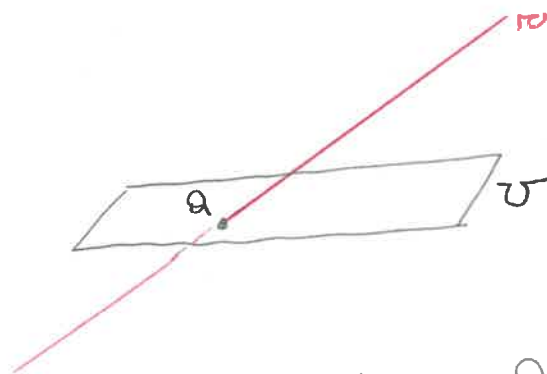
(iv) Poiché $\bar{n}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U = \{x+y=0\} \Rightarrow r$ non è parallela ad U (in parte dove $r \nsubseteq U$)
 $\Rightarrow r \cap U = \{\text{punto}\}$

$$r \cap U: \begin{cases} x+y=0 \\ x=1 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y=0 \\ x=1 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+(1+t)=0 \\ x=1 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=-2 \\ x=1 \\ y=1-2=-1 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \cap U = Q = (1, -1, -1)}$$

r e U incidenti in un punto

(v) Proiezione ortogonale di r su U



1° modo $P_U(\bar{n}_r)$ e poi retta per Q e con vettore direttore $P_U(\bar{n}_r)$

2° modo

Siccome $r: \begin{cases} x-1=0 & E_1 \\ y-z=0 & E_2 \end{cases}$

$\rightarrow$ Fascio piani di asse r

$$a E_1 + b E_2 = 0 \rightarrow a(x-1) + b(y-z) = 0$$

$\mathcal{F}_{a,b}: \boxed{ax + by - bz - a = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}}$

Nel fascio di piani $\Rightarrow$ unico piano $\perp U$

⑨

$$U: 1x + 1y + 0z = 0$$

$$\vec{m}_U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{a,b}: 2x + by - bz = a$$

$$\vec{m}_{\pi_{a,b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$U \perp \pi_{a,b} \Leftrightarrow \vec{m}_U \cdot \vec{m}_{\pi_{a,b}} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ -b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = -2}$$

$$\pi_{2,-2}: 2(x-1) - 2(y-z) = 0 \quad 2 \neq 0$$

$$2[(x-1) - (y-z)] = 0 \Rightarrow \boxed{x - y + z - 1 = 0}; \pi_{1,-1}$$

Ma allora

$$P_U(\pi): \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 & \pi_{1,-1} \\ x + y = 0 & U \end{cases}$$