

1a) $x - 2y = 0$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ho due colonne senza pivot, quindi introduco due parametri liberi.

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

è un piano per l'origine

$y + z = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1b)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ho un solo parametro libero.

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

è una retta per l'origine

$$\begin{aligned} 1c) \dim(U+V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \\ &= 2 + 2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

non Sono in somma diretta perché $\dim(U \cap V) = 1$.

2a)

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

ha rango 2 $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base } U$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

 $R_1 \leftrightarrow R_3$
 $\rightsquigarrow$
 $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è base di V

2b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 $R_2 \leftrightarrow R_3$
 $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$
 $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e' una base di } U+V$$

(2)

$$2c) \dim(U \cap V) = -\dim(U+V) + \dim(U) + \dim(V) = -3 + 2 + 2 = 1$$

(3a) Le porto in forma cartesiana.

$$V: \begin{cases} x=2t \\ y=t+1 \\ z=t+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2(y-1) \\ z=(y-1)+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=-2 \\ -y+z=2 \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} x=w \\ y=2 \\ z=w+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=x+2 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+z=2 \\ y=2 \end{cases}$$

scrivo la matrice dei coefficienti di $V \wedge S$

$$\begin{cases} x-2y=-2 \\ -y+z=2 \\ -x+z=2 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) = A|b$$

Calcoliamo il rango di $(A|b)$ per trovare la posizione reciproca.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \\ & R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2 \\ & \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$rg(A|b)=4$ e $rg(A)=3 \Rightarrow r$ e s sono sghembe

③

REGOLA:

Ricordiamo che

$rg(A|b)=4$ $\rightarrow$ $rg(A)=3$ sghembe

$rg(A)=2$ parallele

$rg(A|b)=3$ $\rightarrow$ $rg(A)=3$ incidenti

$rg(A)=2$ parallele

$rg(A|b)=2 \rightarrow rg(A)=2$ coincidenti.

NON SI INTERSECA E HANNO GIACITURA DIFFERENTE

NON SI INTERSECANO E HANNO STESSA GIACITURA

SI INTERSECANO MA HANNO GIACITURA DIVERSA

///

SI INTERSECANO E HANNO STESSA GIACITURA

nota:

$$rg(A|b) \geq 2$$

$$rg(A) \geq 2$$

perché lo almeno una retta data dall'esercizio.

4)

$$r: x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+z=-1 \\ 2x+2y-z=3 \end{cases}$$

metto insieme le equazioni cartesiane

$$r: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A|b)=3 \quad rg(A)=3$$

r e s sono incidenti.

$$\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & ② & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2}$$