SOLUZIONI TUTORATO 4



1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. A è ridotta a scala, quindi il suo rango è uguale al numero di pivot. $\Longrightarrow rg(A) = 3$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. $rg(B) = \#$ colonne lin indipendenti

siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non sono multipli posso dire $rg(B) = 2$

$\boxed{\# = \text{numero di}}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. $rg(C) = \#$ righe lin indipendenti.

$(1, 1, 1) + (0, 2, 1) = (1, 3, 2)$

pertanto $rg(C) < 3$.

Siccome $(1,1,1)$ e $(1,3,2)$ non sono multipli ho almeno due righe li indip. e $rg(C) = 2$.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. $rg(D) = \#$ righe lin indipendenti $= \#$ colonne lin indipendenti

$-3 \cdot (1, 0, -2, 0) - 2(0, 3, 0, -1) = (-3, -6, 6, 2)$

pertanto $rg(D) \cancel{\leq} 3$. Tuttavia $rg(D) = 2$ perché

(ad esempio) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti.

---

2a)

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ $\quad (A|b) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad$ Controlliamo che sia risolubile

$\downarrow$ $\quad rg(A) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2 \quad rg(A|b) = 2$ perché

$2 \geq rg(A|b) \geq rg(A) = 2$

$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ 3(1+2y) + 2y = 7 \end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ 6y + 2y = 7 - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4/8 = 1/2 \end{cases}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema.

②

2b) $\begin{cases} x+2y=4 \\ -2x-4y=1 \end{cases}$ $(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$rg(A) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right) = 1$ perché le righe sono lin dip.
$-2(1,2) = (-2,-4)$

tuttavia $rg(A|b) = 2$ perché $(1,2,4)$ e $(-2,-4,1)$ non sono multipli.

$\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione.

---

3a) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x-y=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases}$ Scrivo la matrice dei coefficienti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{5}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -11/2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = rg(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ $sol(Ax=b)$ ha dimensione $3-3=0$ quindi ha soluzione unica

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2y+4z=3 \\ -9z = -11/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23/18 \\ y = 5/18 \\ z = \frac{11}{18} \end{cases}$$

(3b)
$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$$

we assign the parameter to the column without a pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{1} & \phantom{1} & \lambda & \phantom{1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rho(A|b)=\rho(A)=2$

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+2\lambda=1 \\ z=\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+1-2\lambda-1+2\lambda= \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1-2\lambda, \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $Sol(Ax=b)$ has $\dim = 3-2=1$

$$Sol(Ax=b)=\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda\in\mathbb{R} \right\}$$

3c)
$$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+4y-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3+2R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + 2R_2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{1} & \lambda & \phantom{1} & \phantom{1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rho(A|b)=\rho(A)=2$

$Sol(Ax=b)= 3-2=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2\lambda+3z=1 \\ -2z=-1 \\ y=\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1-3/2+2\lambda \\ z=1/2 \\ y=\lambda \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Sol(Ax=b)=\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda\in\mathbb{R} \right\}$$

4)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$
$R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 5R_2$
$R_4 \to R_4 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + \frac{6}{16} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

prendo le colonne associate ai pivot nella matrice iniziale.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e' una base di } U$$