

1a) $\vec{w} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, quindi e' una combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Pertanto $\underline{\text{NO}}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ non e' un sistema di vettori lin. indipendenti

1b) $\underline{\text{SI}}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ genera W per definizione di span ma non e' una base perche' non e' un sistema di vett. lin. indipendenti

1c) $\underline{\text{SI}}$, perche' $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\} = W$. Inoltre e' una base perche' $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e' un sistema lin. indipendente.

1d) $\underline{\text{NO}}$, perche' $\dim(W) = 2$ mentre $\dim(V) = 3$. Pertanto non puo' neanche essere una base di V

2a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A-3B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -16 \end{bmatrix}$$

2b) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

B e' simmetrica, A e' triangolare inferiore

2c) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 1+15 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6-1 \\ 1 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3) $\text{tr}(A) = 1-1 = 0$

$$\text{tr}(B) = -2+5 = 3$$

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(AB) = 1-5 = -4$$

$$\text{tr}(BA) = -2-2 = -4$$

} nota: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

3a) $A \cdot B$ non compatibile
 $2 \times 3 \quad 2 \times 2$

3b) $B \cdot A$ $\begin{smallmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{smallmatrix}$ e' compatibile $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 11 & -6 & 20 \end{bmatrix}$

(2)

3c) SI, sono compatibili

$$A X = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

$$B Y = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ -x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

4a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4b) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni $\Rightarrow M\bar{x} = M\bar{y} = 0$

$$M(\bar{x} + \bar{y}) = M\bar{x} + M\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \text{ soluzione}$$

$$M(\lambda \bar{x}) = \lambda M\bar{x} = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda \bar{x} \text{ soluzione } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{sol}(Mx=0) \\ \Rightarrow \text{e' uno} \\ \text{spazio} \\ \text{vettoriale di} \\ \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \\ \text{numero di} \\ \text{incognite} \end{array} \right.$

5a) $M = \begin{bmatrix} 3 & t \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$$M \text{ invertibile} \Leftrightarrow 3 \cdot 2 - (-1) \cdot t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -6$$

nota: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e' invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$

5b) $t=1, M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5c) $M^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$(M^T)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

6a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix}$

A_1 e' ridotta a scala = rango di A e' uguale al numero di pivot.

se $t+1=0 \Rightarrow t=-1$

(3)

$$A_1 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-4} \end{bmatrix}. \text{ Ho due pivot. } \text{rg}(A_1) = 2$$

se $t \neq -1$ ma $t+3=0 \Rightarrow t=-3$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -4 & 2 \\ 0 & \textcircled{-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Ho due pivot. } \text{rg}(A_1) = 2$$

se $t \neq -1, -3$ Ho tre pivot non nulli. $\text{rg}(A_1) = 3$

6b) $A_2 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -4 & 2 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{t} \end{bmatrix}$. A_2 e' ridotta a scala, quindi $\text{rg}(A_2) = \# \text{ di pivot.}$

se $t=0$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -4 & 2 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Ho due pivot. } \text{rg}(A_2) = 2$$

se $t \neq 0$. Ho tre pivot, quindi $\text{rg}(A_2) = 3$