

$$(12) \quad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 2 + 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(16)

$$r: P + t \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 + 2 \cdot t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

oppure $r: \begin{cases} x=0 \\ y=2t+5 \end{cases}$ EQ. PARAMETRICA

(1c) $S: Q + t\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

oppose $S: \begin{cases} X = -1 - t \\ Y = 3t \end{cases}$ EQ. PARAMETRIC

(1d) $r: \begin{cases} x=0 \\ t = \frac{y-s}{2} \end{cases} \Rightarrow x=0$ EQ. CARTESIANA DI V

$$S: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 - x \\ y = 3(-1 - x) \end{cases} \Rightarrow 3x + 3 + y = 0 \quad \text{EQ. CART. di S}$$

(1e) $\vec{v}_1$ non e' multiplo di $\vec{v}_2 \Rightarrow r \neq s$

in $\mathbb{R}^2$ questo significa che r e s sono incidenti (Bovis: in che punto sono incidenti?)

$$\text{RAS: } \begin{cases} x=0 \\ 3x+3+y=0 \end{cases} \Rightarrow y=-3 \Rightarrow \text{Schnittpunkt in } R=(0,-3)$$

$$(2a) \quad r: 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x + 5$$

2

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad r: \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$s: x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

$$s: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad s: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(2b) scelgo $t=0$ nelle eq. parametriche (va bene uno qualunque!)
di $t \in \mathbb{R}$

$$r(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in r$$

$$s(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in s \rightarrow (s \text{ passa per l'origine!})$$

(2c) r è parallela al vettore $\vec{v} = (1, 2)$

s è parallela al vettore $\vec{u} = (-2, 1) \Leftrightarrow$ (vediamo dalle parametriche)

$\vec{v} \times \vec{u} \Rightarrow$ se r non sono parallele,

Siccome siamo in $\mathbb{R}^2$, se r sono incidenti

$$r \wedge s = \begin{cases} -y + 2x + 5 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2(-2y) + 5 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - 4y + 5 = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5y = -5 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sono incidenti in $I = (-2, 1)$

(3)

$$(3a) \quad P-Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1+1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

r passa per P e $Q \Rightarrow r$ passa per P ed è parallela a $\vec{v}$

$$r: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad r: \begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$(3b) \quad s: \begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{2} \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad s: \begin{cases} y = -1 \\ z = -4(1-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x=t \\ y = \frac{1-t}{2} \\ z=3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad s: \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$(3c) \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ non sono paralleli} \Rightarrow r \nparallel s$$

$$r \wedge s: \begin{cases} (1-t) + 2(-1) = 1 \\ 3(1-t) - (-4t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-t-2=1 \\ 3-3t+4t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases} \quad \downarrow$$

non esiste $t \in \mathbb{R}$ t.c. questa sistema ha soluzione.
per cui r e s non sono incidenti

(4a) $\vec{0} \notin A$ quindi non c'è un sottospazio

(4b) si, B è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Dimostriamolo:

(I) $\vec{0} \in B$ ovvero

(II) siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ in $B \Rightarrow \vec{v}_1 = (x_1, 0)$, $\vec{v}_2 = (x_2, 0)$

$\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, 0) \in B$ ovvero

(III) sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\vec{v}_1 \in B \Rightarrow \alpha \vec{v}_1 = \alpha \cdot (x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in B$ ovvero

(4c) NO $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in C$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in C$ eppure $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C$

(4d) si, D è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ perché è la bisettrice del 1° e 3° quadrante. e quindi è una retta che passa per l'origine.

(4)

In ogni caso, dimostriamo:

(I) $0 \in D$ ov

(II) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in D \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in D$ ov

$$\vec{v}_1 = (x_1, x_1)$$

$$\vec{v}_2 = (x_2, x_2)$$

III $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in D \Rightarrow \alpha \vec{v} = (\alpha x_1, \alpha x_1) \in D$ ov

$$\vec{v} = (x_1, x_1)$$

(4e) no, $0 \notin E$ quindi non può essere un sottospazio vettoriale

(5a) no $0 \notin A$

(5b) no $(1, 1, 0), (0, 0, 1) \in B$ ma $(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \notin B$

(5c) si, C è una retta per l'origine

(5d) no, D è una retta che non passa per l'origine.

Infatti, $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sostituendo } x=0, y=0, z=0} \begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ \downarrow \end{matrix}$

(5e) no, $0 \notin E$

(6) $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ non sono multipli $\Rightarrow \vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono lin. indep.

(7) Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \\ +\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sono lin. dipendenti, perché $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$