Geometria 2, a.a. 2006/2007
Ingegneria Edile-Edile Architettura

Tutore: Eleonora Palmieri

14 febbraio 2007

Esercizio 1: Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la conica

$$\Gamma \ : 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1 + 2x_2 = 0.$$

1. Ridurre Γ in forma canonica metrica Γ' e scrivere l'isometria che porta Γ in Γ'.
2. Determinare eventuali centro, assi di simmetria, asintoti e fuochi di Γ.
3. Determinare la sua forma metrica affine Γ'' e scrivere l'affinità che porta Γ in Γ''.
4. Disegnare Γ.

Sol.:

1. Consideriamo la forma quadratica associata a Γ

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2$$

La corrispondente matrice 2×2 è

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si noti che nell'equazione di Γ non compare il termine misto di secondo grado.Quindi la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è una base ortonormale di autovettori corrispondente agli autovalori $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$. Poiché $\det Q = 8 > 0$ la conica Γ è un'ellisse.

Dobbiamo ora procedere con una traslazione che elimini i termini di primo grado. Effettuiamo la trasformazione

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{c} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 + c_1 \\ x_2 = y_2 + c_2 \end{cases}$$

scegliendo opportunamente il vettore $\underline{c}$. Sostituendo nell'equazione di Γ si ha

$$2y_1^2 + 4y_2^2 + y_1(4c_1 + 1) + y_2(8c_2 + 2) + 2c_1^2 + 4c_2^2 + c_1 + 2c_2 = 0$$

Annullando i coefficienti di y_1 e y_2 si ricava $c_1 = c_2 = -1/4$ e Γ diventa

$$2y_1^2 + 4y_2^2 - \frac{3}{8} = 0$$

ossia

$$\Gamma\,' : \frac{16}{3}y_1^2 + \frac{32}{3}y_2^2 = 1$$

Si tratta quindi di un'ellisse a punti reali i cui parametri sono $a = \sqrt{3/16} = \sqrt{3}/4, b = \sqrt{3/32}$. L'isometria che porta Γ in forma canonica metrica è quindi la traslazione $\underline{x} = \underline{y} + \underline{c}$ con

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

2. Sappiamo che $\Gamma\,'$ ha centro di simmetria $C' = O$ e come assi di simmetria gli assi coordinati $y_1 = 0, y_2 = 0$. I suoi fuochi sono i punti $F_1' = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (\sqrt{3/32}, 0), F_2' = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (-\sqrt{3/32}, 0)$. Da questi dati possiamo ricavare centro, assi e fuochi di Γ . Abbiamo le relazioni

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 1/4 \\ x_2 = y_2 - 1/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 + 1/4 \\ y_2 = x_2 + 1/4 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$C = (-1/4, -1/4), F_1 = (\sqrt{3/32} - 1/4, -1/4), F_2 = (-\sqrt{3/32} - 1/4, -1/4).$$

Analogamente gli assi di simmetria sono dati dalle rette $x_1 + 1/4 = 0, x_2 + 1/4 = 0$.

3. A partire dalla forma canonica metrica $\Gamma\,'$ di Γ possiamo ottenere la sua forma canonica affine tramite il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} y_1 = az_1 \\ y_2 = bz_2 \end{cases}$$

Pertanto $\Gamma\,'' : z_1^2 + z_2^2 = 1$ e l'affinità che manda Γ in $\Gamma\,''$ si ottiene componendo quest'ultimo cambiamento di coordinate con l'isometria trovata precedentemente.

4. Cerchiamo i punti di intersezione con gli assi di simmetria dell'ellisse. Nelle coordinate (y_1, y_2) essi sono $(\pm a, 0) = (\pm\sqrt{3}/4, 0), (0, \pm b) = (0, \pm\sqrt{3/32})$. Nel sistema di riferimento originale (x_1, x_2) diventano quindi

$$((\pm\sqrt{3} - 1)/4, -1/4), (-1/4, (\pm\sqrt{3/32} - 1/4)).$$

Esercizio 2: Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la conica

$$\Gamma\ : -x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + x_1 = 0.$$

1. Ridurre Γ in forma canonica metrica Γ' e scrivere l'isometria che porta Γ in Γ'.
2. Determinare eventuali centro, assi di simmetria, asintoti e fuochi di Γ.
3. Disegnare Γ.

Sol.:

1. Consideriamo la forma quadratica associata a Γ

$$f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2$$

La corrispondente matrice 2×2 è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det Q = -2 < 0$ la conica Γ è un'iperbole.

Il primo passo per la riduzione a forma canonica metrica è quello di eliminare il termine misto di secondo grado. Per fare questo troviamo gli autovalori di Q e cerchiamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori. Abbiamo

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

da cui $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -2 < 0$. Calcoliamo gli autovettori: quello relativo a $\lambda_1 = 1$, che chiameremo v_1, soddisfa l'equazione vettoriale

$$Q\underline{x} = \underline{x} \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $x_1 = \sqrt{2}x_2$ e $v_1 = (\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3})$ (si ricordi che vogliamo una base ortonormale dunque richiediamo $\|v_1\| = 1$). Analogamente l'autovettore v_2 corrispondente a $\lambda_2 = -2$ soddisfa l'equazione

$$Q\underline{x} = -2\underline{x} \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $\sqrt{2}x_1 = -x_2$ e $v_2 = (-1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3})$.

Nota: Osserviamo che trovandoci su $\mathbb{R}^2$ e volendo una base ortonormale, una volta trovato il vettore v_1 avremmo anche potuto determinare v_2 cercando un vettore ortogonale a v_1 e dividendolo poi per la sua norma. Tale vettore è univocamente determinato a meno del verso.

Definiamo la matrice

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

L'isometria

$$\underline{x} = M\underline{y} \qquad \begin{cases} x_1 = (\sqrt{2}y_1 - y_2)/\sqrt{3} \\ x_2 = (y_1 + \sqrt{2}y_2)/\sqrt{3} \end{cases}$$

(si verifichi che si tratta di una rotazione) porta Γ nella forma

$$y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 = 0$$

Dobbiamo ora procedere con una traslazione che elimini i termini di primo grado. Effettuiamo la trasformazione

$$\underline{y} = \underline{z} + \underline{c} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 + c_1 \\ y_2 = z_2 + c_2 \end{cases}$$

scegliendo opportunamente il vettore $\underline{c}$. Sostituendo nell'equazione di Γ si ha

$$z_1^2 - 2z_2^2 + z_1(2c_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}) + z_2(-4c_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + c_1^2 - 2c_2^2 + c_1\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{c_2}{\sqrt{3}} = 0$$

Annullando i coefficienti di y_1 e y_2 si ricava $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, c_2 = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$ e Γ diventa

$$z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{1}{8} = 0$$

ossia

$$\Gamma\,' : 8z_1^2 - 16z_2^2 = 1$$

Si tratta quindi di un'iperbole non degenere i cui parametri sono $a = 1/(2\sqrt{2}), b = 1/4$. L'isometria che porta Γ in forma canonica metrica è quindi la composizione

$$\underline{x} = M\underline{y} = M(\underline{z} + \underline{c}) = M\underline{z} + M\underline{c}$$

con

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

2. Sappiamo che $\Gamma\,'$ ha centro di simmetria $C' = O$ e come assi di simmetria gli assi coordinati $z_1 = 0, z_2 = 0$. I suoi fuochi sono i punti $F_1' = (\sqrt{a^2+b^2}, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{4}, 0), F_2' = (-\sqrt{a^2+b^2}, 0) = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$, mentre gli asintoti sono le rette

$$\frac{z_1}{a} + \frac{z_2}{b} = 0, \quad \frac{z_1}{a} - \frac{z_2}{b} = 0.$$

ossia

$$z_1 + \sqrt{2}z_2 = 0, \quad z_1 - \sqrt{2}z_2 = 0$$

Nota bene: $\Gamma\,'$ interseca soltanto l'asse $z_2 = 0$ nei due punti $(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$ mentre non ha alcuna intersezione né con l'asse $z_1 = 0$, né con gli asintoti.

Da questi dati possiamo ricavare centro, assi e fuochi di Γ . Abbiamo le relazioni

$$\underline{x} = M\underline{z} + M\underline{c}$$

e

$$\underline{z} = M^t(\underline{x} - M\underline{c}) = M^t\underline{x} - \underline{c}$$

ossia

$$\begin{cases} x_1 = (\sqrt{2}z_1 - z_2)/\sqrt{3} - 1/4 \\ x_2 = (z_1 + \sqrt{2}z_2)/\sqrt{3} - 1/(2\sqrt{2}) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = (\sqrt{2}x_1 + x_2)/\sqrt{3} + 1/\sqrt{6} \\ z_2 = (-x_1 + \sqrt{2}x_2)/\sqrt{3} + 1/(4\sqrt{3}) \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$C = M\underline{c} = (-1/4, -1/(2\sqrt{2}))$$
$$F_1 = MF_1' + M\underline{c} = (1/(2\sqrt{2}) - 1/4, 1/4 - 1/(2\sqrt{2}))$$
$$F_2 = MF_2' + M\underline{c} = (-1/(2\sqrt{2}) - 1/4, -1/4 - 1/(2\sqrt{2}))$$

Analogamente gli assi di simmetria sono dati dalle rette $\sqrt{2}x_1 + x_2 + 1/\sqrt{2} = 0, -x_1 + \sqrt{2}x_2 + 1/4 = 0$ (intersecato in due punti dall'iperbole), mentre gli asintoti sono

$$x_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \quad 2\sqrt{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$$

3. Per disegnare l'iperbole abbiamo bisogno dei due punti di intersezione di Γ con l'asse $-x_1 + \sqrt{2}x_2 + 1/4 = 0$. Nelle coordinate (z_1, z_2) essi sono, come abbiamo visto, i punti $(\pm 1/(2\sqrt{2}), 0)$. Utilizzando le formule trovate in precedenza otteniamo

$$(1/(2\sqrt{3}) - 1/4, (1 - \sqrt{3})/(2\sqrt{6})), (-1/(2\sqrt{3}) - 1/4, (-1 - \sqrt{3})/(2\sqrt{6}))$$

Esercizio 3: Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la conica

$$\Gamma \; : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2 + x_1 = 0.$$

1. Ridurre Γ in forma canonica metrica Γ' e scrivere l'isometria che porta Γ in Γ'.

2. Determinare eventuali centro, assi di simmetria, asintoti e fuochi di Γ .

3. Disegnare Γ .

Sol.:

1. Consideriamo la forma quadratica associata a Γ

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

La corrispondente matrice 2×2 è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det Q = 0$ la conica Γ è una parabola.

Vogliamo eliminare il termine misto di secondo grado. Per fare questo troviamo gli autovalori di Q e cerchiamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori. Abbiamo

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

da cui $\lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = 0$. Calcoliamo gli autovettori: quello relativo a $\lambda_1 = 2$, che chiameremo v_1, soddisfa l'equazione vettoriale

$$Q\underline{x} = 2\underline{x} \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $x_1 = -x_2$ e $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ (si ricordi che vogliamo una base ortonormale dunque richiediamo $\|v_1\| = 1$). Analogamente l'autovettore v_2 corrispondente a $\lambda_2 = 0$ soddisfa l'equazione

$$Q\underline{x} = 0 \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $x_1 = x_2$ e $v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Definiamo la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

L'isometria

$$\underline{x} = M\underline{y} \qquad \begin{cases} x_1 = (y_1 + y_2)/\sqrt{2} \\ x_2 = (-y_1 + y_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

porta Γ nella forma

$$2y_1^2 + \sqrt{2}y_2 = 0$$

Effettuiamo ora la trasformazione

$$\underline{y} = N\underline{z} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = -z_2 \end{cases}$$

dove

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di Γ si ha

$$\sqrt{2} z_1^2 = z_2$$

Si tratta quindi di una parabola non degenere di parametro $a = \sqrt{2}$. L'isometria che porta Γ in forma canonica metrica è quindi la composizione

$$\underline{x} = M\underline{y} = MN\underline{z}$$

2. Sappiamo che Γ' ha vertice $C' = O$ e asse di simmetria la retta $z_1 = 0$. Il suo fuoco è il punto $F' = (0, \frac{1}{4a}) = (0, \frac{1}{4\sqrt{2}})$.

   Da questi dati possiamo ricavare centro, asse e fuoco di Γ. Abbiamo le relazioni

$$\underline{x} = MN\underline{z}$$

   e

$$\underline{z} = N^t M^t \underline{x}$$

   ossia

$$\begin{cases} x_1 = (z_1 - z_2)/\sqrt{2} \\ x_2 = (-z_1 - z_2)/\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ z_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

   da cui ricaviamo

$$C = MNC' = O = (0,0)$$
$$F_1 = MNF' = (-1/8, -1/8)$$

   Analogamente l'asse di simmetria è la retta $x_1 - x_2 = 0$.

3. Cerchiamo le intersezioni con gli assi $x_1 = 0, x_2 = 0$. Esse sono date dai punti

$$(0,0), (0,-1), (-1,0).$$

Esercizio 4: Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la quadrica

$$\Gamma : x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2yz + 4y = 0.$$

Determinare il tipo di Γ e dedurne la sua forma canonica affine.

Sol.: Consideriamo la forma quadratica associata a Γ

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2yz$$

La corrispondente matrice 3×3 è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Poichè $\det Q = -7 < 0$ e $Tr(Q) = 0$ possiamo concludere che la forma quadratica ha rango tre ed ha due autovalori negativi ed uno positivo. In questo caso è anche possibile determinare esplicitamente gli autovalori:

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 7) = 0$$

implica $\lambda = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

La quadrica assegnata rientra perciò nel tipo II ed è quindi una delle seguenti:

1. iperboloide ad una falda
2. iperboloide a due falde
3. cono quadrico

Per decidere in quale dei tre casi rientra la nostra quadrica scegliamo un punto Q su di essa e controlliamo le derivate parziali della funzione che definisce la quadrica. Se esse si annullano tutte contemporaneamente, allora il punto Q è singolare e la quadrica è un cono. Altrimenti guardiamo l'intersezione tra la quadrica ed il suo piano tangente in Q.

Fissiamo ad esempio $Q = (0, 0, 0)$. E' facile vedere che appartiene alla quadrica. Calcoliamo ora le derivate parziali di

$$g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2yz + 4y$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} g_x(0,0,0) &= 2x|_{(0,0,0)} = 0 \\ g_y(0,0,0) &= 4y + 2z + 4|_{(0,0,0)} = 4 \\ g_z(0,0,0) &= -6z + 2y|_{(0,0,0)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi l'origine è un punto nonsingolare di Γ ed il piano tangente a Γ in $Q = O$ è

$$\pi : y = 0$$

La sua intersezione con Γ è la conica

$$x^2 - 3z^2 = 0$$

la quale è chiaramente costituita da una coppia di rette incidenti. Ne deduciamo che Γ è un'iperboloide ad una falda. La sua forma canonica affine sarà pertanto

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 1.$$

Esercizio 5: Si consideri in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la proiettività f che manda ordinatamente i punti

$$[1:0], [0:1], [1:1]$$

nei punti

$$[3:1], [1:1], [1:2]$$

1. Scrivere la matrice associata alla proiettività f.
2. Determinare l'immagine del punto $[3:4]$ e del punto $[1:2]$.
3. Stabilire se f è una prospettività.

Sol.:

1. Dobbiamo avere
$$(1,2) = a(3,1) + b(1,1)$$
per opportuni numeri reali a, b. Pertanto
$$\begin{aligned} 1 &= 3a + b \\ 2 &= a + b \end{aligned}$$
da cui $a = -1/2, b = 5/2$. La matrice della proiettività è data quindi da
$$F = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$
(o equivalentemente da ogni suo multiplo reale).
2. Si ha
$$f([3:4]) = [11:17]$$
e
$$f([1:2]) = [7:9]$$
3. Dobbiamo verificare se f ammette un punto fisso $[\alpha : \beta]$. Esso corrisponderà ad un autovettore reale della matrice F. Abbiamo
$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(5-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 10 = 0$$

che ha come soluzione $\lambda_1 = 1 + \sqrt{11}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{11}$. Ne deduciamo che f non è una prospettività perché ammette due punti fissi, che sono gli autovettori relativi a λ_1 e λ_2.

Nota: La condizione affinché una proiettività sia anche una prospettività è infatti che tale proiettività abbia esattamente un punto fisso (e non due come nel caso che stiamo considerando). Un esempio di prospettività è dato dalla proiettività associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui si trova l'unico punto fisso $[1 : 0]$ relativo all'unico autovalore $\lambda = 1$.

Esercizio 6: Si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiettività f che manda ordinatamente i punti

$$[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]$$

nei punti

$$[2 : 0 : 1], [1 : 2 : 0], [0 : 1 : 0], [1 : 0 : 1]$$

1. Scrivere la matrice associata alla proiettività f.
2. Stabilire se le rette $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$ sono fissate da f e, in caso affermativo, dire se sono luogo di punti fissi.
3. Calcolare l'immagine tramite f della retta $x_2 = 0$.

Sol.:

1. Dobbiamo avere
$$(1, 0, 1) = a(2, 0, 1) + b(1, 2, 0) + c(0, 1, 0)$$
per opportuni numeri reali a, b, c. Pertanto
$$\begin{aligned} 1 &= 2a + b \\ 0 &= 2b + c \\ 1 &= a \end{aligned}$$
da cui $a = 1, b = -1, c = 2$. La matrice della proiettività è data quindi da
$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(o equivalentemente da ogni suo multiplo reale).

2. Consideriamo la retta $x_0 = 0$. La sua immagine tramite f è data da

$$f([0 : \beta : \gamma]) = [-\beta : -2\beta + 2\gamma : 0]$$

Analogamente

$$f([\alpha : 0 : \gamma]) = [2\alpha : 2\gamma : \alpha]$$

Quindi tali rette non sono fissate da f.

3. La retta $x_2 = 0$ è costituita dai punti $[\alpha : \beta : 0]$ la cui immagine tramite f è

$$[2\alpha - \beta : -2\beta : \alpha]$$

Tali punti soddisfano l'equazione

$$2x_0 - x_1 - 4x_2 = 0$$

che descrive quindi la retta voluta.

Esercizio 7: Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la conica affine

$$\Gamma\ : x^2 + 4y^2 - 4xy - 2 = 0.$$

1. Trovare la chiusura proiettiva $\Gamma\,'$ di Γ tramite l'immersione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2$ (con coordinate proiettive $[x_0 : x_1 : x_2]$) che manda $\mathbb{R}^2$ nello schermo $A_0 := \{x_0 \neq 0\}$.
2. Trovare i punti impropri di Γ e dedurne la classificazione affine e la forma canonica affine di Γ .
3. Si determini l'espressione dell'equazione di Γ nelle altre due carte affini e la loro classificazione affine.

Sol.:

1. La chiusura proiettiva di Γ è descritta dal polinomio di secondo grado

$$\Gamma\,' : -2x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = 0.$$

2. I punti impropri di Γ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$(x_1 - 2x_2)^2 = x_0 = 0$$

con l'unica soluzione $[0 : 2 : 1]$.

La matrice associata alla chiusura proiettiva di Γ è

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2. Si tratta quindi di una conica semplicemente degenere a punti reali. Ne deduciamo che Γ è una coppia di rette parallele ed ha forma canonica affine

$$X_1^2 = 1$$

3. Nella carta (o schermo) $A_1 := \{x_1 \neq 0\}$ l'equazione di Γ' diventa

$$-2z^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 0$$

dove abbiamo posto $z = x_0/x_1, y = x_2/x_1$, che ha punti impropri dati dal sistema

$$\begin{cases} -2x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$-2x_0^2 + 4x_2^2 = x_1 = 0$$

da cui si ricavano i due punti $[\sqrt{2} : 0 : 1], [-\sqrt{2} : 0 : 1]$. Nella carta A_1 Γ' è quindi rappresentata da un'iperbole degenere la cui forma affine è

$$X_1^2 - X_2^2 = 0.$$

Nella carta (o schermo) $A_2 := \{x_2 \neq 0\}$ l'equazione di Γ' diventa

$$-2z^2 + x^2 - 4x + 4 = 0$$

dove abbiamo posto $z = x_0/x_2, x = x_1/x_2$, che ha punti impropri dati dal sistema

$$\begin{cases} -2x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$-2x_0^2 + x_1^2 = x_2 = 0$$

da cui si ricavano i due punti $[1 : \sqrt{2} : 0], [1 : -\sqrt{2} : 0]$. Anche nella carta A_2 la conica proiettiva Γ' è quindi rappresentata da un'iperbole degenere.