1. Determinare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$, giustificando le risposte:

(i) $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \}.$

(ii) $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 1 \}.$

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 - y = 0 \}.$

Sol. (i) L'insieme U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in tre incognite, dunque è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
(ii) L'insieme V non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; ad esempio, non contiene il vettore zero.
(iii) L'insieme W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; ad esempio, il vettore $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, ma $2X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ non appartiene a W.

2. Scrivere i seguenti sottospazi come Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, per opportuni vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

(i) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^5;$

(ii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \} \quad \subset \mathbf{R}^4;$

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^3.$

Sol. (i) Risolvendo il sistema di due equazioni in cinque variabili

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

troviamo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}t_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(ii) Stavolta si tratta di un sistema di una sola equazione in quattro variabili:

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = -2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(iii) La soluzione del sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto lo spazio vettoriale W si riduce al solo vettore nullo. La sua base è l'insieme vuoto.

3. Trovare equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$:
   (i) $U = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \}$;
   (ii) $V = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \}$;

Sol. (i) Il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è la retta del piano passante per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa retta ha equazione cartesiana $3y - 2x = 0$.

Alternativamente:
Il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

è uguale ad uno. Dall'eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x/3 \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x/3 \\ 0 & y - 2x/3 \end{pmatrix}$$

Chiaramente questa matrice ha rango uno se e solo se $3y - 2x = 0$, e dunque questa è l'equazione cartesiana cercata.

(ii) Iniziamo con l'osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è multiplo del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dunque

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Il sottospazio cercato è la retta del piano per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa retta ha equazione cartesiana $y - 2x = 0$.

Alternativamente:
Iniziamo con l'osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è linearmente dipendente dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dunque

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

e dunque si tratta di uno spazio di dimensione uno. Pertanto il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ apparterrà allo spazio V se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

sarà uguale ad uno. Dall'eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y - 2x \end{pmatrix}$$

Chiaramente questa matrice ha rango uno se e solo se $y - 2x = 0$, e dunque questa è l'equazione cartesiana cercata.

4. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad W_2 = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Sol. Si ha che $W_1 \subseteq W_2$ se e solo se entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ appartengono a W_2. Si vede facilmente che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

mentre

$$\text{non esistono } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \text{tali che} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(il sistema lineare corrispondente è incompatibile). Ne segue che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_2 \quad \text{e} \quad W_1 \nsubseteq W_2.$$

Allo stesso modo si ha che $W_2 \subseteq W_2$ se e solo se entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartengono a W_1. Si verifica che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_1.$$

Quindi $W_2 \nsubseteq W_1$.

Alternativamente:
Si verifica facilmente (ad esempio mediante eliminazione gaussiana) che i sistemi di generatori forniti sono costituiti da vettori linearmente indipendenti e dunque sia W_1 che W_2 risultano essere sottospazi di dimensione due. Chiaramente $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ se e solo se $\dim(W_1 + W_2) = 2$. Ma

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

e dunque avrà dimensione 2 se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Ma l'eliminazione gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ci mostra che il rango di questa matrice è in effetti uguale a 3: nessuna delle due inclusioni è vera.

5. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\} \qquad W_2 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Sol. si vede facilmente che il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ appartiene a W_1 (è uno dei generatori), ma non a W_2 (le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce W_2). Dunque $W_1 \not\subseteq W_2$. Si ha che

$$W_2 = span\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin W_1, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin W_1.$$

Dunque $W_2 \not\subseteq W_1$.
Alternativamente:
Anche in questo caso si vede facilmente che sia W_1 che W_2 hanno dimensione due. Dunque un'inclusione equivale a $W_1 = W_2$. Ma si vede facilmente che il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ appartiene a W_1 (è uno dei generatori), ma non a W_2 (le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce W_2). Dunque nessuna delle due inclusioni è vera.

1. Determinare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$, giustificando le risposte:

   (i) $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \}.$

   (ii) $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 1 \}.$

   (iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 - y = 0 \}.$

Sol. (i) L'insieme U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in tre incognite, dunque è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
(ii) L'insieme V non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; ad esempio, non contiene il vettore zero.
(iii) L'insieme W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; ad esempio, il vettore $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, ma $2X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ non appartiene a W.

2. Scrivere i seguenti sottospazi come $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, per opportuni vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

   (i) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^5;$

   (ii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \} \quad \subset \mathbf{R}^4;$

   (iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^3.$

Sol. (i) Risolvendo il sistema di due equazioni in cinque variabili

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

troviamo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}t_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(ii) Stavolta si tratta di un sistema di una sola equazione in quattro variabili:

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = -2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} , \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(iii) La soluzione del sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto lo spazio vettoriale W si riduce al solo vettore nullo. La sua base è l'insieme vuoto.

3. Trovare equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$:
   (i) $U = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \}$;
   (ii) $V = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \}$;

Sol. (i) Il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è la retta del piano passante per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa retta ha equazione cartesiana $3y - 2x = 0$.
Alternativamente:
Il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

è uguale ad uno. Dall'eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x/3 \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x/3 \\ 0 & y - 2x/3 \end{pmatrix}$$

Chiaramente questa matrice ha rango uno se e solo se $3y - 2x = 0$, e dunque questa è l'equazione cartesiana cercata.
(ii) Iniziamo con l'osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è multiplo del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dunque

$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Il sottospazio cercato è la retta del piano per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa retta ha equazione cartesiana $y - 2x = 0$.
Alternativamente:
Iniziamo con l'osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è linearmente dipendente dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dunque

$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

e dunque si tratta di uno spazio di dimensione uno. Pertanto il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ apparterrà allo spazio V se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

sarà uguale ad uno. Dall'eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y - 2x \end{pmatrix}$$

Chiaramente questa matrice ha rango uno se e solo se $y - 2x = 0$, e dunque questa è l'equazione cartesiana cercata.

4. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad W_2 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Sol. Si ha che $W_1 \subseteq W_2$ se e solo se entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ appartengono a W_2. Si vede facilmente che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

mentre

$$\text{non esistono } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \text{tali che} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(il sistema lineare corrispondente è incompatibile). Ne segue che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_2 \quad \text{e} \quad W_1 \not\subseteq W_2.$$

Allo stesso modo si ha che $W_2 \subseteq W_2$ se e solo se entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartengono a W_1. Si verifica che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_1.$$

Quindi $W_2 \not\subseteq W_1$.
Alternativamente:
Si verifica facilmente (ad esempio mediante eliminazione gaussiana) che i sistemi di generatori forniti sono costituiti da vettori linearmente indipendenti e dunque sia W_1 che W_2 risultano essere sottospazi di dimensione due. Chiaramente $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ se e solo se $\dim(W_1 + W_2) = 2$. Ma

$$W_1 + W_2 = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

e dunque avrà dimensione 2 se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Ma l'eliminazione gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ci mostra che il rango di questa matrice è in effetti uguale a 3: nessuna delle due inclusioni è vera.

5. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\} \qquad W_2 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Sol. si vede facilmente che il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ appartiene a W_1 (è uno dei generatori), ma non a W_2 (le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce W_2). Dunque $W_1 \not\subseteq W_2$. Si ha che

$$W_2 = span\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin W_1, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin W_1.$$

Dunque $W_2 \not\subseteq W_1$.
Alternativamente:
Anche in questo caso si vede facilmente che sia W_1 che W_2 hanno dimensione due. Dunque un'inclusione equivale a $W_1 = W_2$. Ma si vede facilmente che il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ appartiene a W_1 (è uno dei generatori), ma non a W_2 (le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce W_2). Dunque nessuna delle due inclusioni è vera.

1. Apostol: Sezione 1.15, Esercizi 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15.

2. Decidere se i seguenti insiemi di vettori sono indipendenti o meno.

(i)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^3;$$

(ii)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^5;$$

(iii)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^3;$$

(iv)

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^2.$$

Sol.
(i) I tre vettori dati non sono linearmente indipendenti: il terzo vettore è uguale all'opposto del secondo.
(ii)

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+2\beta=0\\ -\alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Dunque i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.
Alternativamente
Usiamo il metodo dell'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&0\\-1&1&-1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\-1&1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 3 e dunque i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.
(iii) Il vettore nullo O dipende linearmente da tutti gli altri. Dunque un insieme di vettori contenente il vettore nullo non può mai essere un insieme di vettori linearmente indipendenti.
(iv) Ogni vettore non nullo, preso da solo, costituisce un sistema di vettori linearmente indipendenti.

3. Siano u, v, w, p vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^4$. Determinare quali delle seguenti terne di vettori sono linearmente indipendenti:

$$\{u, u+v, u+p\} \qquad \{u-w, w, 4w\} \qquad \{u+v, u+p, w+p\}.$$

Sol. Controlliamo se

$$\alpha u + \beta(u+v) + \gamma(u+p) = O \quad \text{è equivalente a} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Poiché u, v, p sono linearmente indipendenti,

$$\alpha u + \beta(u+v) + \gamma(u+p) = (\alpha+\beta+\gamma)u + \beta v + \gamma p = O \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dunque $\{u, u+v, u+p\}$ sono linearmente indipendenti.
Con lo stesso procedimento si trova che i vettori $\{u-w, w, 4w\}$ sono linearmente dipendenti (ciò si deduce anche direttamente dal fatto che w e $4w$ sono uno multiplo dell'altro) e che $\{u+v, u+p, w+p\}$ sono linearmente indipendenti.

Alternativamente
Poiché u, v, w, p sono quattro vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^4$, essi formano una base di $\mathbf{R}^4$. Possiamo dunque lavorare in coordinate rispetto a questa base. La prima terna diventa

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Si vede facilmente (eliminazione gaussiana) che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango tre, e dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti.
Nella seconda terna si vede subito che il secondo e il terzo vettore sono linearmente dipendenti e non c'è bisogno di andare a lavorare in coordinate. Infine, la terza terna diventa

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Si vede facilmente (eliminazione gaussiana) che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango tre, e dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti.

4. Sia

$$U = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \quad \text{in } \mathbf{R}^5.$$

(i) Determinare un insieme di generatori linearmente indipendenti di U;

(ii) Determinare se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U.$$

Sol. (i) Anche in questo caso si tratta di applicare il metodo dell'eliminazione gaussiana. Lo applichiamo alla matrice che ha per righe i vettori dati

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le righe della matrice finale sono generatori linearmente indipendenti di U. Poiché con l'elim. di Gauss nessuna riga della matrice si è annullata, anche i tre vettori di partenza erano linearmente indipendenti.

(ii) Il vettore $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ apparterrà al sottospazio U se e solo se risulta linearmente dipendente dai generatori di U. Applicando l'eliminazione gaussiana alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente

(i) Anche in questo caso si tratta di applicare il metodo dell'eliminazione gaussiana. Lo applichiamo alla matrice che ha i vettori dati come colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque i tre generatori proposti sono linearmente indipendenti.

• ATTENZIONE: lo *span* delle colonne della matrice finale *NON È* uguale ad U.

(ii) Il vettore $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ apparterrà al sottospazio U se e solo se risulta linearmente dipendente dai generatori di U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango quattro, dunque u è linearmente indipendente dai generatori di U e pertanto non appartiene al sottospazio U.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

(i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.

(ii) Determinare $\mathbf{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ cosí che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ siano linearmente indipendenti.

(iii) Esprimere i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Sol. (i) Per mostrare che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono indipendenti usiamo, al solito, l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Si vede facilmente che $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è linearmente indipendente da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Cerchiamo α, β, γ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e troviamo $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 1/2$. Allo stesso modo troviamo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente
L'algoritmo di Gauss-Jordan può essere utilizzato anche per esprimere le coordinate dei vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ rispetto ad un altra base:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3\,;$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_3\,;$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_3\,.$$