Lezione 6. Trigonometria: le funzioni *seno*, *coseno*, *tangente*. Semplici applicazioni geometriche. Equazioni e disequazioni trigonometriche.

1. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$ un angolo. Il *seno* ed il *coseno* di φ sono, per definizione, le coordinate del punto P sulla circonferenza di centro l'origine O e raggio 1, tale che il segmento $\overline{OP}$ forma un angolo φ con l'asse delle ascisse positive.
$$P = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$
   (i) Dimostrare che $|\sin\varphi| \leq 1$ e $|\cos\varphi| \leq 1$.
   (ii) Dimostrare che $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

2. Verificare che vale $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, per ogni $x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

3. Determinare $\sin\theta$ e $\cos\theta$ per i seguenti valori dell'angolo θ:
$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{-\pi}{3}, \quad -\pi, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{3}.$$
   Determinare per quali valori di θ la funzione $\tan\theta$ è ben definita e quanto vale.

4. Determinare tutti gli $x \in \mathbf{R}$ che soddisfano le equazioni
$$\cos x = \frac{1}{2}, \qquad |\cos x| = \frac{1}{2}, \qquad \sin x = \cos x, \qquad |\sin x| = |\cos x|, \qquad \tan x = 1.$$

5. Determinare tutti gli $x \in \mathbf{R}$ che soddisfano le disequazioni
$$\cos^2 x < \frac{1}{2}, \qquad -1 < \cos 2x < 0, \qquad \tan x < 1, \qquad \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x < 0.$$

6. Determinare le coordinate del punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sulla circonferenza di centro l'origine O e raggio r, sapendo che il segmento $\overline{OP}$ forma un angolo φ con l'asse delle ascisse positive. Dimostrare che tali coordinate soddisfano la relazione $x^2 + y^2 = r^2$.

7. Disegnare i punti $P = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$. Dimostrare che tali coordinate soddisfano la relazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

8. Disegnare i punti $P = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$, per $a\ b > 0$, al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$. Dimostrare che tali coordinate soddisfano la relazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

9. Sia T un triangolo isoscele. Calcolare l'area di T sapendo che i due lati uguali hanno lunghezza a e formano un angolo di ampiezza 2γ.

10. (*La regola del coseno*) Sia ABC un triangolo con lati di lunghezza a, b c ed angoli α, β e γ. Sia Q la proiezione ortogonale di C sul lato AB.
    (i) Far vedere che $|CQ| = b\sin\alpha$ e $|AQ| = b\cos\alpha$.
    (ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo CQB e dedurre le relazioni
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

11. Dimostrare che un triangolo di lati $3, 4, 5$ è rettangolo.