

Lezione 3. Grafico di semplici funzioni polinomiali. Disequazioni polinomiali di primo e secondo grado. Divisione fra polinomi.

1. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = x, \quad f(x) = 2x, \quad f(x) = -5x, \quad f(x) = 2x + 1, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = |2x + 1|.$$

In ognuno dei casi, determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ vale $f(x) < 0$, $f(x) = 0$, $f(x) > 0$.

2. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = -2x^2, \quad f(x) = -x^2 + 1, \quad f(x) = |-x^2 + 1|.$$

In ognuno dei casi, determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ vale $f(x) < 0$, $f(x) = 0$, $f(x) > 0$.

3. Determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ sono verificate le seguenti disequazioni

$$(x - 2)(x - 1) \geq 0, \quad 3x^2 - 2 \geq 0, \quad -x^2 + x + 2 \leq 0, \quad x^2 - x > 3x + 2, \quad -x^2 + x > \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

4. Determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ sono verificate le seguenti disequazioni

$$x(x + 1)(x - 5) \geq 0, \quad x(x + 1)(x - 5) < 0, \quad (x - 1)(x^2 + x + 1) \geq 0.$$

5. Sia dato il polinomio $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$. Verificare che si annulla per $x = 0$ e $x = 1$. Scriverlo come prodotto di monomi di grado 1.

6. Sia dato il polinomio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Scriverlo come prodotto di monomi di grado 1. Determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ vale $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$.

7. Sia dato il polinomio $6x^3 - x^2 - 5x + 2$. Determinare se è o meno divisibile per il polinomio $2x - 1$.

8. Siano dati i polinomi $p(x) = x^5 + x - 2$, $f(x) = x^3 - x + 1$, $q(x) = 3x^2 + x$, $r(x) = x + 1$.
(a) Determinare se è vero o meno che $p(x) = q(x)f(x) + r(x)$.

9. Determinare quoziente $q(x)$ e resto $r(x)$ nella divisione del polinomio $p(x)$ per il polinomio $f(x)$, dove:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 2 \quad \text{ed} \quad f(x) = x^2 + 1;$$

$$p(x) = x^4 - x^3 + 3x + 1 \quad \text{ed} \quad f(x) = x^2 - 2;$$

$$p(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1 \quad \text{ed} \quad f(x) = x^3 + 1.$$

10. Sfruttare i risultati dell'esercizio precedente per scrivere le espressioni razionali $\frac{p(x)}{f(x)}$ nella forma

$$\frac{p(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}.$$

11. Vedi anche Esercizi2.