UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di GEOMETRIA 3 (F. Tovena - F. Flamini) 25 febbraio 2020
Giustificare le risposte con chiarezza.

1) Sia $\mathbf{R}$ la retta reale dotata di topologia euclidea, e sia $X := \{x, y\}$, $x \neq y \in \mathbf{R}$, dove X è dotato di topologia banale. Sia $Y = \mathbf{R} \times X$ lo spazio topologico prodotto e si considerino infine i seguenti sottospazi di Y:

$$W := ([-1,1] \times \{x\}) \cup ((-3,3) \times \{y\}) \quad e \quad Z := ((-1,1) \times \{x\}) \cup ([-3,3] \times \{y\}).$$

(1.a) Mostra che, per ogni aperto non vuoto U di Y, esiste un aperto V nella topologia euclidea di $\mathbf{R}$ tale che $U = V \times X$.

(1.b) Stabilire se Y è uno spazio di Hausdorff, se è connesso, se è connesso per archi e se è compatto.

(1.c) Costruire esplicitamente un cammino in W che congiunga $(1, x) \in Y$ con $(0, y) \in Y$.

(1.d) Stabilire se W è compatto e se Z è compatto.

2) Nello spazio topologico $\mathbf{R}^2$ dotato della topologia euclidea, si consideri il sottospazio

$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 - y = 0\}.$$

(2.a) Stabilire se X è chiuso, se è connesso e se è localmente compatto.

(2.b) Determina il gruppo fondamentale della compattificazione di Alexandroff X^∞ di X, con punto base l'origine $O(0, 0)$.

(2.c) Siano $P(-1, -1)$ e $Q(1, 1)$ due punti di X e $A = \{P, Q\}$. Discutere se lo spazio quoziente X/A ha lo stesso tipo di omotopia della compattificazione di Alexandroff X^∞ di X.

Cenni di soluzione

1) *Sia* $\mathbf{R}$ *la retta reale dotata di topologia euclidea, e sia* $X := \{x, y\}$, $x \neq y \in \mathbf{R}$, *dove* X *è dotato di topologia banale. Sia* $Y = \mathbf{R} \times X$ *lo spazio topologico prodotto e si considerino infine i seguenti sottospazi di* Y*:*

$$W := ([-1, 1] \times \{x\}) \cup ((-3, 3) \times \{y\}) \quad e \quad Z := ((-1, 1) \times \{x\}) \cup ([-3, 3] \times \{y\}).$$

(1.a) Mostra che, per ogni aperto non vuoto U *di* Y*, esiste un aperto* V *nella topologia euclidea di* $\mathbf{R}$ *tale che* $U = V \times X$*.*

(1.b) Stabilire se Y *è uno spazio di Hausdorff, se è connesso, se è connesso per archi e se è compatto.*

(1.c) Costruire esplicitamente un cammino in W *che congiunga* $(1, x) \in Y$ *con* $(0, y) \in Y$*.*

(1.d) Stabilire se W *è compatto e se* Z *è compatto.*

Svolgimento (1.a) Nella topologia prodotto, ogni aperto è unione di aperti prodotto. Quindi, dato un aperto non vuoto U di Y, esistono aperti V_i nella topologia euclidea di $\mathbf{R}$ e W_j nella topologia di X tali che $U = \bigcup_{j \in J} V_j \times W_j$. Poiché X è dotato della topologia banale, l'unico aperto non vuoto di X è X: dunque, se U è non vuoto, si deve avere $W_j = X$ per ogni $j \in J$. Posto $V = \bigcup_{j \in J} V_j$, il sottoinsieme V è aperto nella topologia euclidea perché unione di aperti, e si ricava la tesi.

(1.b) Ricordiamo il risultato generale visto a lezione:

A e B sono spazi topologici di Hausdorff (risp. connessi, connessi per archi, compatti) se e solo se $A \times B$ è spazio topologico di Hausdorff (risp. connesso, connesso per archi, compatto).

Poiché $\mathbf{R}$ con la topologia euclidea non è compatto, lo spazio Y non è compatto.

D'altra parte, la retta reale dotata di topologia euclidea è di Hausdorff, connessa e connessa per archi; lo spazio Y ha le medesime proprietà se e solo se anche $X := \{x, y\}$ dotato della topologia banale soddisfa tali proprietà. Notiamo che X non è di Hausdorff: infatti l'unico intorno di x è X, lo stesso vale per il punto y. Lo spazio X è connesso per archi (e, in particolare, connesso, come già dimostrato): infatti un possibile arco tra x e y è dato dall'applicazione continua $\gamma : I \to X$ definita come segue

$$\gamma(t) := x \text{ se } t \neq 1, \quad \gamma(1) = y, \text{ altrimenti.}$$

Tale applicazione è continua perché l'antiimmagine di ogni aperto è aperta: infatti, l'unico aperto non vuoto di X è X (tutte le applicazioni aventi codominio con topologia banale sono continue). In particolare, lo spazio X è connesso perché connesso per archi: la connessione di X poteva anche essere provata direttamente, osservando che i sottoinsieme aperti che sono contemporaneamente chiusi di X sono esclusivamente X e $\emptyset$.

Deduciamo pertanto che Y è connesso, che è connesso per archi ma che non è di Hausdorff.

(1.c) Sia $\gamma : I \to Z$ l'applicazione definita da

$$\gamma(t) = (1 - 2t, x) \text{ se } t \leq 1/2 \text{ mentre } \gamma(t) = (0, y) \text{ altrimenti.}$$

L'applicazione γ risulta essere continua. Per verificarlo, osserviamo che la restrizione di γ a $[0, 1/2]$ è continua perché è una parametrizzazione affine di un segmento euclideo, composto con l'inclusione continua di $\mathbf{R}$ come $\mathbf{R} \times \{x\}$ nello spazio prodotto Y. Per il lemma di incollamento, è sufficiente quindi verificare la continuità della restrizione di γ all'intervallo $[1/2, 1]$. A tal fine, è sufficiente verificare che sia aperta l'antiimmagine dell'intersezione di Z con un qualsiasi aperto prodotto di Y. Sia dunque $B \subset Z$ un aperto dato da $B = (V \times X) \cap Z$, con V aperto di $\mathbf{R}$; se $0 \notin V$ allora $\gamma^{-1}(B) = \emptyset$ altrimenti $\gamma^{-1}(B) = [1/2, 1]$. L'applicazione γ, essendo continua, è pertanto un cammino in Z e, per costruzione, congiunge i punti $(1/2, x)$ e $(0, y)$.

(1.d) Il sottospazio W non è compatto. Infatti, la proiezione sul primo fattore

$$\pi_1 : Y = \mathbf{R} \times X \to \mathbf{R}, \quad (t, a) \to t, \quad \text{dove } a \in X$$

è continua e $\pi_1(W) = (-3, 3)$ non è compatto in $\mathbf{R}$ (mentre l'immagine di un compatto tramite una applicazione continua è sempre compatta).

Studiamo ora il sottospazio Z. Per definizione di topologia indotta e per quanto osservato nel punto (1.a), un sottoinsieme U è un aperto non vuoto in Z se e solo se esiste V aperto di $\mathbf{R}$ tale che $U = (V \times X) \cap Z$. Il sottoinsieme U è dunque dato da

$$((V \cap (-1, 1)) \times \{x\}) \cup ((V \cap [-3, 3]) \times \{y\}).$$

Sia dunque $\{U_i\}_{i \in I}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di Z dove, per quanto osservato prima,

$$U_i = ((V_i \cap (-1, 1)) \times \{x\}) \cup ((V_i \cap [-3, 3]) \times \{y\}),$$

per opportuni aperti V_i della retta euclidea. Allora, posto $W_i = V_i \cap [-3, 3]$, si ha che $\{W_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto del sottospazio $[-3, 3]$, che è compatto in quanto intervallo chiuso e limitato di $\mathbf{R}$. Possiamo quindi estrarre da $\{W_i\}_{i \in I}$ un sottoricoprimento finito $\{W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}\}$ di $[-3, 3]$. Poiché $(-1, 1) \subset [-3, 3]$, i corrispondenti aperti euclidei $V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}$ ricoprono anche $(-1, 1)$. Se ne deduce che gli aperti $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ di Z costituiscono un sottoricoprimento finito di $\{U_i\}_{i \in I}$, deducendo quindi che Z è compatto.

2) *Nello spazio topologico $\mathbf{R}^2$ dotato della topologia euclidea, si consideri il sottospazio*

$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 - y = 0\}.$$

(2.a) Stabilire se X è chiuso, se è connesso e se è localmente compatto.

(2.b) Determina il gruppo fondamentale della compattificazione di Alexandroff X^∞ di X, con punto base l'origine $O(0, 0)$.

(2.c) Siano $P(-1, -1)$ e $Q(1, 1)$ due punti di X e $A = \{P, Q\}$. Discutere se lo spazio quoziente X/A ha lo stesso tipo di omotopia della compattificazione di Alexandroff X^∞ di X.

Svolgimento (2.a) Notiamo che X è anti-immagine di $0 \in \mathbf{R}$ mediante la funzione continua (perché polinomiale)

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \to x^3 - y.$$

Poiché $0 \in \mathbf{R}$ è chiuso (visto che $\mathbf{R}$ è T_1) e l'anti-immagine rispetto a una funzione continua di ogni chiuso è chiusa, allora X è chiuso. Notiamo che X è una curva piana omeomorfa a $\mathbf{R}$ dotato di topologia euclidea: l'omeomorfismo è dato dalla parametrizzazione di X

$$\mathbf{R} \to X, \quad t \to (t, t^3)$$

il cui inverso è la restrizione a X della proiezione di $\mathbf{R}^2$ sulla prima coordinata. Pertanto X è connesso perché omeomorfo a $\mathbf{R}$. Per lo stesso motivo X è localmente compatto.

(2.b) Poiché X è omeomorfo a $\mathbf{R}$, la sua compattificazione di Alexandroff X^∞ risulta omeomorfa alla compattificazione di Alexandroff di $\mathbf{R}$, che è omeomorfa a S^1 per quanto visto a lezione. Allora X^∞ è di Hausdorff, connesso e connesso per archi e il gruppo fondamentale non dipende dal punto base scelto. Sempre dall'omeomorfismo $X^\infty \cong S^1$ possiamo dire che $\pi_1(X^\infty, O) \cong \mathbf{Z}$.

(2.c) Per quanto osservato nel punto (2.a), il quoziente X/A è omeomorfo al quoziente $\mathbf{R}/\{-1,1\}$. Sia $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\{-1,1\}$ la proiezione canonica. Osserviamo che la restrizione di p al sottoinsieme $I_- = (-\infty, -1]$ è un omeomorfismo, e dunque l'immagine $p(I_-)$ è contraibile come I_- (con equivalenza omotopica rel $p(-1)$). Analogo risultato è vero per $I_+ = [1, +\infty)$, equivalenza omotopica rel $p(1) = p(-1)$). Dunque, X/A ha lo stesso tipo di omotopia di $p([-1,1])$, che è omotopo a S^1.