
ESERCIZI
1. INSIEMISTICA

1.1 Sia Σ l'insieme dei punti dello spazio, Γ una sfera e N il suo polo nord. Quali delle seguenti relazioni sono corrette?

- $N \in \Gamma$;
- $N \in \Sigma$;
- $\Gamma \in \Sigma$;
- $\Gamma \subset \Sigma$;
- $N \subset \Sigma$;
- $\Gamma \in N$.

1.2 Dire quali dei seguenti insiemi sono vuoti e descriverne il complementare nell'insieme dei numeri reali:

- A:= $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x \geq \frac{1}{3}\}$;
 B:= $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x > \frac{1}{3}\}$;
 C:= $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x \geq \frac{1}{2}\}$;
 D:= $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x = 0\}$;
 E:= $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x = 1\}$;
 F:= $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 0\}$;
 G:= $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 1\}$.

1.3 Quali e quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{a, b, c, d\}$?

Scegliere a, b, c tali che posto $A = \{a, b\}$ e $B = \{c\}$ risulti $A = B$.

1.4 Dati gli insiemi $X = \{0, 1, 2, \sqrt{2}, 1/3\}$, $Y = \{0, 1, -1/2, \sqrt{2}\}$ e $Z = \{1, 2, \sqrt{2}, -1/2\}$ determinare

- $X - Y$;
- $X \cap Y \cap Z$;
- $X \cap (Y \cup Z)$.

1.5 Quali e quante sono le coppie di $A \times A$ essendo $A = \{a, b, c, d\}$?

2. INSIEMI NUMERICI

2.1. Eseguire senza calcolatrice la divisione con resto di 237 per 43 ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione compiuta.

2.1.1 Si consideri il numero $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$. È possibile decidere se è divisibile per 17 senza eseguire alcuna operazione?

Quali sono i numeri naturali minori di 30 che sono multipli sia di 4 che di 6?

2.1.2 Trovare MCD e mcm di 10002 e 9999.

2.2. Se il prodotto di sette numeri interi è negativo cosa si può dire del segno dei sette fattori?

2.3. Date le frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{5}$ dire qual è la maggiore e trovare un'ulteriore frazione strettamente compresa tra esse.

2.3.1 Ridurre ai minimi termini la frazione $560/1960$.

2.3.2 Scrivere la frazione generatrice di $3,5\overline{27}$.

Senza far uso della calcolatrice, scrivere sotto forma decimale la frazione $41/6$.

2.3.3 Riscrivere in ordine crescente i seguenti numeri: $\frac{2}{5}$; 0; -1; 0,91; -3; 0,19; 0,003.

2.4. Siano a, b numeri reali tali che $0 < a \leq b$. Qual è il maggiore tra i numeri $1/a$ e $1/b$?

2.4.1 Il numero $\sqrt{0,9}$ è maggiore, minore o uguale al numero 0,81?

2.4.2 Dati due numeri reali positivi a e b , è più grande la loro media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ oppure la loro media geometrica \sqrt{ab} ?

2.4.3 Posizionando sulla retta reale i numeri $1 - 1/2$, $1 - 3/2$, $1 - 1/4$, $-1 + 3/2$, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ottengono 3 segmenti e due semirette. Quale dei segmenti che si formano è il più grande?

2.4.4 Per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta $|x - 1| + 2 = 0$?

4.4 Eseguire, utilizzando la regola di Ruffini, la divisione $(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 12) : (x - 2)$ scrivendone preliminarmente il resto.

Decomporre il seguente polinomio $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$ in prodotto di polinomi di primo grado.

4.5 Calcolare $(x - 3)^8$.

È possibile scomporre nel prodotto di due polinomi di grado uno il polinomio $x^2 - 4$? Ed il polinomio $x^2 + 4$?

Scomporre i seguenti polinomi nel prodotto di almeno due polinomi di grado inferiore a quello del polinomio di partenza

- $3x^4 - 19$;
- $x^6 - 64$;
- $x^9 - 512$;
- $x^6 + 64$;
- $x^4 + 1$.

4.6 Decomporre, senza usare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, i seguenti polinomi di secondo grado nel prodotto di due polinomi di primo grado:

- $x^2 - 3x + 12$;
- $x^2 - 7x + 12$;
- $x^2 - 3x$;
- $x^2 - 32$;
- $x^2 - x + 0, 25$.

4.7 Stabilire quante soluzioni negative hanno le equazioni

- $x^2 - 3x + 12 = 0$;
- $x^2 - 7x + 12 = 0$;
- $x^2 + 5x + 12 = 0$;
- $x^2 + 2x + 1 = 0$;
- $x^2 - 32 = 0$;
- $x^2 - x + 0, 25 = 0$.

5. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

5.1 Dire di quali delle seguenti espressioni è soluzione $x_0 = 2$:

- $(x - 2)^2 = 0$;
- $(x - 2)^2 \geq 0$;
- $x^2 - 3x + 5 \geq 0$;
- $x^2 - 3x + 5 \leq 0$;
- $x \neq 2$;
- $x = 2$.

5.2 Risolvere l'equazione $(2x + 1)(3x - 2)(x + 4) = 0$.

Scrivere un'equazione di terzo grado che abbia per soluzioni i numeri $-1, 4, 11/3$.

Trovare le radici (reali) di $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Risolvere $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$.

5.3 Determinare i valori di x per i quali risulta $2x - 3 > 0$.

Determinare i valori di x per i quali risulta $-2x > -1$.

5.4 Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0, 3x + 0, 12y = 0; \\ 5x - 2y = 2. \end{cases}$$

5.5 Risolvere le seguenti disequazioni:

- $4x^2 - 5x + 1 \geq 0$;
- $5x - x^2 \geq 0$;
- $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$;
- $4x - 1 - 4x^2 \geq 0$;
- $x^2 + 2x + 4 > 0$;
- $x^2 - 16 < 0$;
- $3 - x^2 > 0$.

- 6.7 Considerata una circonferenza e un punto del piano dire quante tangenti si possono mandare dal punto alla circonferenza a seconda che il punto sia esterno interno o appartenente alla circonferenza.
- 6.8 Una piazza quadrata può essere ricoperta da 100 mattonelle quadrate di lato $1m$. Quante mattonelle di lato $0.5m$ occorrono per ricoprire la stessa piazza? Quanti mattoni cubici di lato $1m$ occorrono per formare una struttura cubica di lato $1m$?
- 6.9 Qual è l'area di un esagono regolare di lato l ?
- 6.10 L'intersezione di due piani distinti nello spazio è una retta se i piani sono incidenti, l'insieme vuoto se i piani sono paralleli. Quali tipi di intersezione si possono presentare se si hanno tre piani distinti nello spazio?
- 6.11 Quanto misura la diagonale di un cubo di lato $1m$?
Due sfere hanno rispettivamente superficie S_1 ed S_2 e volume V_1, V_2 . Se $S_1 = 4S_2$, qual è il valore del rapporto V_1/V_2 ?

7. CENNI DI TRIGONOMETRIA

- 7.1 Tradurre in radianti la misura degli angoli la cui ampiezza espressa in gradi è pari a 180° , 60° , -45° , 105° .

Tradurre in gradi la misura degli angoli la cui ampiezza espressa in radianti è pari a $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{12}$.

Usando la calcolatrice scientifica si dica quanti gradi vale un radiante approssimando il risultato al decimo di secondo.

- 7.2 Provare che $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

- 7.3 Calcolare

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi - \cos(-5\pi)}{(\operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi)^2 + \operatorname{sen}(-\frac{5}{6}\pi)}$$

- 7.4 Determinare le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x$.

- 7.5 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$;
- $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\operatorname{tg}^2 x < 1$;
- $\cos^2 x < \frac{1}{4}$;
- $\operatorname{sen}^2 x \geq 1$.

- 7.6 Usando la calcolatrice scientifica si approssimino alla prima cifra decimale le quantità $\operatorname{sen}(1^\circ)$ e $\operatorname{sen}(1\text{radiante})$. Usando la calcolatrice scientifica determinare in radianti il valore dell'angolo $x \in [0, \pi/2]$ tale che $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Svolgere lo stesso esercizio determinando x in gradi per $x \in [90^\circ, 180^\circ]$.

- 7.7 Determinare la misura dell'altezza relativa alla base di un triangolo isoscele avente i lati congruenti di 40 cm e angoli alla base di 30° .