COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Sia data la trasformazione* $L\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   (i) Verificare che L *è un'isometria di* $\mathbf{R}^3$.
   (ii) Determinare autovalori e autospazi di L.
   (iii) Dare un'interpretazione geometrica di L.

(i) Si ha

$$\|L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})\| = \| \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} \| = \sqrt{z^2 + (-y)^2 + x^2} = \| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \|.$$

Dunque L è un'isometria. Ed infatti, L è una trasformazione lineare rappresentata, nella base canonica (ortonormale) di $\mathbf{R}^3$, da una matrice ortogonale.
(ii) Gli autovalori di L sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, e i relativi autospazi sono dati rispettivamente da

$$V_1 = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \qquad V_{-1} = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}^{\perp} = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

(iii) Geometricamente, L è una rotazione intorno al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'autospazio V_1 coincide infatti con l'insieme dei punti fissi di L. Il fatto che sul piano V_{-1}

2. *Siano date le rette proiettive* $l : x_1 - x_2 = 0$ *ed* $m : x_0 - 4x_2 = 0$ *in* $\mathbf{P}^2$. *Sia* $\pi_R\colon l \longrightarrow m$ *la prospettività di centro* $R = (2:1:0)$.
   (i) Verificare che $R = (2:1:0)$ *è un punto esterno ad* l *ed* m.
   (ii) Verificare che $P = (3:1:1)$ *appartiene ad* l.
   (ii) Calcolare $\pi_R(P)$.

(i) Le coordinate di R non soddisfano le equazioni delle rette l ed m:
(ii) Le coordinate di P soddisfano le equazioni di l.
(iii) Per definizione la prospettività di centro R è data dall'intersezione della retta per R e P con la retta m:

$$\pi_R(P) = \overline{RP} \cap m.$$

La retta $\overline{RP}$ ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Risolvendo il sistema

$$\overline{RP} \cap m : \quad \begin{cases} x_0 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - 4x_2 = 0, \end{cases}$$

si trova che il punto $\pi_R(P) \in \mathbf{P}^2$ ha coordinate omogenee $(8:3:2)$.

3. *Determinare la proiettività* $f: \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ *che manda i punti* $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ *rispettivamente in* $(2:3)$, $(2:-1)$, $(0:1)$.
   (i) Calcolare $f(1:4)$ *ed* $f(3:1)$.
   (ii) Determinare eventuali punti fissi di f.
   (iii) È possibile che f *sia una prospettivià fra due rette proiettive* l, m *in* $\mathbf{P}^2$, *di centro un punto esterno ad esse? (spiegare la risposta).*

La proiettività f esiste ed è unica, perché manda una terna di punti distinti in una terna di punti distinti. È data da $f(x_0 : x_1) = (2x_0 - 2x_1 : 3x_0 + x_1)$. Tutte le matrici $\lambda \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, inducono la stessa trasformazione di $\mathbf{P}^1$.

(i) $f(1:4) = (-6:7)$ ed $f(3:1) = (2:5)$.

(ii) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ non ha autovalori reali. Quindi la trasformazione proiettiva f non ha punti fissi.

(iii) Una prospettività $\pi_\alpha : l \to m$ ha sempre un punto fisso: $l \cap m$. Dunque f non può essere una prospettività.

4. *Siano* A, B, C *tre punti distinti su una retta proiettiva* l *(come in figura). Costruire geometricamente un punto* D *con birapporto* $(ABCD) = -1$ *(quarto armonico).*

Vedi appunti sul birapporto e relative figure.