COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Sia dato il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$: $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \}$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (i) Determinare una base di $U^\perp$.

   (ii) Calcolare $d(P, U)$.

(i) Si ha

$$U = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \qquad \dim U = 2.$$

Il complemento ortogonale $U^\perp$ di U è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione $\dim U^\perp = \dim \mathbf{R}^4 - \dim U = 2$ dato da

$$U^\perp \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \qquad \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \} \text{ base di } U^\perp.$$

(ii) Si ha $d(P, U) = d(P, \pi_U(P))$, dove $\pi_U(P)$ è la proiezione ortogonale di P su U. Una base ortonormale di U è data da

$$\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \}$$

e la proiezione ortogonale $\pi_U(P)$ è data da

$$\pi_U(P) = (\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza la distanza cercata è

$$d(P, U) = \| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \| = 1.$$

2. *Sia* l *la retta del piano di equazione* $X - 2Y = 1$.

   (i) Scrivere la formula generale della riflessione R_l *rispetto ad* l.

   (ii) Calcolare $R_l(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $R_l(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$, $R_l(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

   (iii) Calcolare l'immagine tramite R_l *della retta* $Y = 0$.

(i) Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un punto generico del piano. La retta per P e perpendicolare ad l è data da

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+t \\ b-2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e interseca l nel punto corrispondente al valore del parametro $t = \frac{1-a+2b}{5}$. Il simmetrico di P rispetto ad l è il punto corrispondente al valore del parametro $2t = \frac{2(1-a+2b)}{5}$

$$R_l(P) = R_l(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{2(1-a+2b)}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a+4b+2}{5} \\ \frac{4a-3b-4}{5} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

La formula generale della riflessione R_l è data dalle (*).
(ii)

$$R_l(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \qquad R_l(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R_l(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che i punti $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartengono ad l e dunque sono punti fissi di R_l. Inoltre, poiché l non passa per l'origine, $R_l(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) L'immagine tramite R_l della retta $Y = 0$ è la retta per i punti $R_l(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $R_l(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ ed ha equazione $X - 3/4Y = 1$.

3. *Siano date le rette proiettive* $l: \ x_0 - x_1 = 0$ *ed* $m: \ x_1 - x_2 = 0$ *in* $\mathbf{P}^2$. *Sia* $\pi_R: l \longrightarrow m$ *la prospettività di centro* $R = (2:1:0)$.
   (i) Verificare che $P = (1:1:-1)$ *appartiene ad* l.
   (ii) Calcolare $\pi_R(P)$.

(i) Il punto $P = (1:1:-1)$ appartiene ad l: infatti le coordinate del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ soddisfano l'equazione del piano $x_0 - x_1 = 0$, la cui immagine tramite la proiezione canonica è proprio l. Il punto R non appartiene né ad l né ad m.
(ii) La retta proiettiva per R e P ha equazione

$$\overline{RP} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x_0 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Il punto $\pi_R(P)$ è dato dall'intersezione della retta $\overline{RP}$ con la retta m, ossia

$$\pi_R(P) = \overline{RP} \cap m = (3:1:1) \in \mathbf{P}^2.$$

4. *Siano* P, Q, R, S *quattro punti distinti su una retta proiettiva* $l \subset \mathbf{P}^2$ *(come in figura).*
   (i) Costruire geometricamente la proiettività $f: l \longrightarrow l$ *che manda* P, Q, R *rispettivamente in* Q, P, R.
   (ii) Determinare $f(S)$.

(ii) Tracciamo una retta ausiliaria m passante per il punto fisso R. Sia α un punto esterno ad l ed m e sia $\pi_\alpha: l \longrightarrow m$ la prospettività di centro α. Siano $P_0 = \pi_\alpha(P)$, $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$, sia $\alpha' = \overline{Q_0P} \cap \overline{QP_0}$ e $\pi_{\alpha'}: m \longrightarrow l$ la prospettività di centro α'. La composizione

$$\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha : l \longrightarrow l$$

è una proiettività che, come f, manda la terna di punti distinti P, Q, R rispettivamente in Q, P, R. Dunque coincide con f.
(ii) Per costruire $f(S)$ basta costruire $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha(S) = \pi_{\alpha'}(\pi_\alpha(S))$.