Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 9 Esercizi

[1]

9.1) Siano G un gruppo e X un G-insieme.

(i) Lo **stabilizzatore** di un punto $x \in X$ è l'insieme $G_x := \{g \in G \,|\, g \cdot x = x\}$. Verifica che, per ogni $x \in X$, l'insieme G_x è un sottogruppo di G.

(ii) L'**orbita di un elemento** $x \in X$ è l'insieme $G \cdot x := \{y \in X \,|\, \exists\, g \in G \text{ t.c. } y = g \cdot x\}$. Dimostra che se $x \neq y$, allora o $G \cdot x = G \cdot y$ oppure $G \cdot x \cap G \cdot y = \emptyset$.

(iii) Verifica che X e' unione di orbite sotto l'azione di G.

9.2) Sia $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ il sottospazio di $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{eucl})$. Considera l'applicazione $f : \mathbf{Z} \times X \to X$ definita da

$$(m, (x, y)) \mapsto (m + x, (-1)^m y),$$

al variare di $m \in \mathbf{Z}$ e di $(x, y) \in X$.

a) Mostra che l'applicazione f definisce una azione (sinistra) di $\mathbf{Z}$ su X.

b) Mostra che lo spazio quoziente $X/\mathbf{Z}$ è omeomorfo al nastro di Moebius.

9.3) Si consideri $\mathbf{R}^3$ dotato della topologia euclidea. Si consideri il sottospazio

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

(i) Si dica se X puo' essere omeomorfo a $\mathbf{R}$, se puo' essere omeomorfo a $\mathbf{R}^2$.

(ii) Si determinino le componenti connesse di $\mathbf{R}^3 \setminus X$

(iii) Considerate le due isometrie di $\mathbf{R^3}$:

$$\sigma(x, y, z) = (x, y - z), \quad \tau(x, y, z) = (-x - y, z),$$

determinare il gruppo $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ da esse generato.

(iv) Verificare che $Y := X \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e' un G-insieme e che G agisce su Y con stabilizzatori banali.

(v) Determinare le componenti connesse di Y e descrivere l'azione del gruppo ciclico $\langle \sigma \rangle$ sulle componenti connesse di Y.

9.4) Sia X un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ dotato di topologia euclidea. Dimostra che:

(i) X convesso $\Rightarrow$ X contraibile.

(ii) X contraibile $\Rightarrow$ X connesso per archi.

9.5) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico. Sia S^1 la circonferenza unitaria, dotata della topologia di sottospazio di $\mathbf{R}^2$ euclideo. Sia $f : S^1 \to X$ un'applicazione continua. Mostra che sono equivalenti:

a) f e' omotopa ad un'applicazione costante;

b) f si estende ad un'applicazione continua $g : \overline{B_1(\vec{0})} \to X$, i.e. $g|_{\partial \overline{B_1(\vec{0})}} = g|_{S^1} = f$;

c) per ogni $\vec{x}_0 \in S^1$, esiste un'omotopia H tra f e l'applicazione costante $\epsilon_{f(\vec{x}_0)}$ tale che $H(\vec{x}_0, t) = f(\vec{x}_0)$, per ogni $t \in I$.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

9.6) Si consideri $\mathbf{R}^3$ dotato della topologia euclidea e sia $\ell \subset \mathbf{R}^3$ una qualsiasi retta. Dimostrare che $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ e' omotopicamente equivalente ad (i.e. ha lo stesso tipo di omotopia di) S^1.

9.7) Si consideri nello spazio topologico $\mathbf{R}^3$ euclideo il sottospazio

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\}.$$

(i) Stabilire se Z e' connesso o, in caso di risposta negativa, determinare le sue componenti connesse;

(ii) Dato $\mathbf{R}^3 \setminus Z$ e' contraibile? e' connesso per archi? e' connesso?

9.8) Sia X uno spazio topologico e siano

$$f, g : X \to S^n, \ n \geq 1$$

due applicazioni continue tali che

$$f(x) \neq -g(x), \ \ \forall x \in X.$$

(i) Dimostra che f e' omotopa a g.

(ii) Deduci che ogni funzione continua, non suriettiva $f : X \to S^n$ e' omotopa a un'applicazione costante $\epsilon_{\vec{x}_0}$ per qualche $\vec{x}_0 \in S^n$.