Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 9 Esercizi - SVOLGIMENTI

[1]

9.1) Siano $G$ un gruppo e $X$ un G-insieme.

(i) Lo **stabilizzatore** di un punto $x \in X$ è l'insieme $G_x := \{g \in G \,|\, g \cdot x = x\}$. Verifica che, per ogni $x \in X$, l'insieme $G_x$ è un sottogruppo di $G$.

(ii) L'**orbita di un elemento** $x \in X$ è l'insieme $G \cdot x := \{y \in X \,|\, \exists\, g \in G \ t.c.\ y = g \cdot x\}$. Dimostra che se $x \neq y$, allora o $G \cdot x = G \cdot y$ oppure $G \cdot x \cap G \cdot y = \emptyset$.

(iii) Verifica che $X$ e' unione di orbite sotto l'azione di $G$.

9.2) Sia $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ il sottospazio di $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{eucl})$. Considera l'applicazione $f : \mathbf{Z} \times X \to X$ definita da

$$(m, (x, y)) \mapsto (m + x, (-1)^m y),$$

al variare di $m \in \mathbf{Z}$ e di $(x, y) \in X$ .

a) Mostra che l'applicazione $f$ definisce una azione (sinistra) di $\mathbf{Z}$ su $X$.

b) Mostra che lo spazio quoziente $X/\mathbf{Z}$ è omeomorfo al nastro di Moebius.

9.3) Si consideri $\mathbf{R}^3$ dotato della topologia euclidea. Si consideri il sottospazio

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

(i) Si dica se $X$ puo' essere omeomorfo a $\mathbf{R}$, se puo' essere omeomorfo a $\mathbf{R}^2$.

(ii) Si determinino le componenti connesse di $\mathbf{R}^3 \setminus X$

(iii) Considerate le due isometrie di $\mathbf{R^3}$:

$$\sigma(x, y, z) = (x, y - z), \quad \tau(x, y, z) = (-x - y, z),$$

determinare il gruppo $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ da esse generato.

(iv) Verificare che $Y := X \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e' un $G$-insieme e che $G$ agisce su $Y$ con stabilizzatori banali.

(v) Determinare le componenti connesse di $Y$ e descrivere l'azione del gruppo ciclico $\langle \sigma \rangle$ sulle componenti connesse di $Y$.

9.4) Sia $X$ un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ dotato di topologia euclidea. Dimostra che:

(i) $X$ convesso $\Rightarrow$ $X$ contraibile.

(ii) $X$ contraibile $\Rightarrow$ $X$ connesso per archi.

9.5) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico. Sia $S^1$ la circonferenza unitaria, dotata della topologia di sottospazio di $\mathbf{R}^2$ euclideo. Sia $f : S^1 \to X$ un'applicazione continua. Mostra che sono equivalenti:

a) $f$ e' omotopa ad un'applicazione costante;

b) $f$ si estende ad un'applicazione continua $g : \overline{B_1(\vec{0})} \to X$, i.e. $g|_{\partial \overline{B_1(\vec{0})}} = g|_{S^1} = f$;

c) per ogni $\vec{x}_0 \in S^1$, esiste un'omotopia $H$ tra $f$ e l'applicazione costante $\epsilon_{f(\vec{x}_0)}$ tale che $H(\vec{x}_0, t) = f(\vec{x}_0)$, per ogni $t \in I$.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

9.6) (i) Siano $X_1$ e $Y_1$, rispettivamente $X_2$ e $Y_2$, spazi topologici omotopicamente equivalenti. Dimostrare che $X_1 \times Y_1$ e' omotopicamente equivalente a $X_2 \times Y_2$.

(ii) Si consideri $\mathbf{R}^3$ dotato della topologia euclidea e sia $\ell \subset \mathbf{R}^3$ una qualsiasi retta. Dimostrare che $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ e' omotopicamente equivalente ad (i.e. ha lo stesso tipo di omotopia di) $S^1$.

9.7) Si consideri nello spazio topologico $\mathbf{R}^3$ euclideo il sottospazio

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\}.$$

(i) Stabilire se $Z$ e' connesso o, in caso di risposta negativa, determinare le sue componenti connesse;

(ii) Dato $\mathbf{R}^3 \setminus Z$ e' contraibile? e' connesso per archi? e' connesso?

9.8) Sia $X$ uno spazio topologico e siano

$$f, g : X \to S^n, \ n \geq 1$$

due applicazioni continue tali che

$$f(x) \neq -g(x), \ \ \forall x \in X.$$

(i) Dimostra che $f$ e' omotopa a $g$.

(ii) Deduci che ogni funzione continua, non suriettiva $f : X \to S^n$ e' omotopa a un'applicazione costante $\epsilon_{\vec{x}_0}$ per qualche $\vec{x}_0 \in S^n$.

**Svolgimenti**

9.1) Ricordiamo che un'azione di un gruppo $G$ (con elemento neutro $e$) su un insieme $Y$ è un'applicazione

$$G \times Y \to Y, \quad (g, y) \mapsto g \cdot y$$

tale che

(A1) $e \cdot y = y$ per ogni $y \in Y$;

(A2) $g \cdot (h \cdot y) = (gh) \cdot y$ per ogni $g, h \in G$ ed ogni $y \in Y$.

(i) Sia $g \in G_x$ e denotiamo con $e \in G$ l'elemento neutro. Mostriamo che anche $g^{-1} \in G_x$: per (A1) abbiamo $x = e \cdot x$, d'altronde $e = g^{-1}g$, quindi per (A2) vale $x = g^{-1} \cdot (g \cdot x)$, ma $g \cdot x = x$ e ne deduciamo $g^{-1} \cdot x = x$, ovvero $g^{-1} \in G$. Siano ora $g, h \in G_x$, per (A2) abbiamo $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ e quindi $gh \in G_x$. Abbiamo così dimostrato che $G_x$ è un sottogruppo di $G$.

(ii) Siano $x \neq y \in X$ t.c. $G \cdot x \cap G \cdot y \neq \emptyset$. Pertanto esistono $g, h \in G$ tali che $g \cdot x = h \cdot y$, i.e. $y = (h^{-1}g) \cdot x$. Dunque $y \in G \cdot x$ e quindi $G \cdot y \subseteq G \cdot x$. Per motivi analoghi, $x = (g^{-1}h) \cdot y$ e dunque $G \cdot x \subseteq G \cdot y$.

(iii) Per l'azione di $G$ su $X$ sappiamo che, per ogni $g \in G$,

$$\theta_g : X \to X, \ x \to g \cdot x$$

e' una biiezione di $X$ in se'. Pertanto, ogni $y \in X$ e' nell'orbita di qualche $x \in X$. Dunque $X = \bigcup_{x \in X/G} G \cdot x$.

9.2) a) Come ricordato prima, un'azione di un gruppo $G$ (con elemento neutro $e$) su un insieme $Y$ è un'applicazione

$$G \times Y \to Y, \quad (g, y) \mapsto g \cdot y$$

tale che

(A1) $e \cdot y = y$ per ogni $y \in Y$;

(A2) $g \cdot (h \cdot y) = (gh) \cdot y$ per ogni $g, h \in G$ ed ogni $y \in Y$.

a) Dobbiamo dunque verificare che l'applicazione $f : \mathbf{Z} \times X \to X$ fornita nell'enunciato soddisfi (A1) e (A2):

(A1) l'elemento neutro di $\mathbf{Z}$ è 0 e abbiamo $0 \cdot (x, y) = (0 + x, (-1)^0 y) = (x, y)$ per ogni $x, y \in X$;

(A2) siano ora $n, m \in \mathbf{Z}$, allora $n \cdot (m \cdot (x, y)) = n \cdot (m + x, (-1)^m y) = (n + (m + x), (-1)^n ((-1)^m y)) = ((n + m)x, (-1)^{n+m} y) = (n + m) \cdot (x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Nel punto successivo denoteremo $x \sim y$ se $y \in [x] \in X/\mathbf{Z}$.

b) Ricordiamo che il nastro di Moebius $M$ è il quoziente dello spazio topologico $[0, 1] \times [-1, 1]$ (dove $[0, 1]$ lo consideriamo con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbf{R}$) per la seguente relazione di equivalenza: se $x \neq 0, 1$, allora $(x, y) \sim_1 (x', y')$ se e solo se $x = x'$ e $y = y'$; $(0, y) \sim (1, -y)$ per ogni $y \in [0, 1]$. Notiamo che $M$ è omeomorfo al quoziente $M'$ dello spazio topologico $[0, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ per la stessa relazione di equivalenza: se $x \neq 0, 1$, allora $(x, y) \sim_1 (x', y')$ se e solo se $x = x'$ e $y = y'$; $(0, y) \sim_1 (1, -y)$ per ogni $y \in [0, 1]$. L'omeomorfismo è indotto dall'applicazione $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to [0, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ data da $(x, y) \mapsto (x, \frac{1}{2}y)$.

Notiamo che $X = \mathbf{R} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ed abbiamo dunque un'inclusione $i : [0, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \hookrightarrow X$. Facciamo ora vedere che $(x, y) \sim_1 (x', y')$ se e solo se $i((x, y)) = (x, y) \sim i((x', y')) = (x', y')$. Mostriamo prima di tutto l'implicazione $\Rightarrow$. Se $x \neq 0, 1$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, possiamo assumere $x = 0$ e $x' = 1$ e quindi $y' = -y$, ma allora $(x', y') = (1 + 0, (-1)^1 y) = 1 \cdot (x, y)$, ovvero $(x', y') \sim (x, y)$. Facciamo ora vedere $\Leftarrow$. Supponiamo che $(x', y') \in \mathbf{Z} \cdot (x, y)$. Allora esiste un $n \in \mathbf{Z}$ tale che $x' = n + x$ e $y' = (-1)^n y$. Poiché $x, x' \in [0, 1]$ se $x \neq 0, 1$ deve valere $x = x'$ e dunque $n = 0$ e $y' = y$, altrimenti se $x = 0$, risp. $x = 1$, deve valere $x' = 1$, risp. $x' = 0$, e quindi $n = 1$, risp, $n = -1$, e dunque $y' = (-1)^1 y = -y$, risp. $y' = (-1)^{-1} y = -y$. Ne deduciamo che l'inclusione induce un'applicazione continua

$$g : M' \to X/\mathbf{Z}, \quad [(x, y)] \mapsto [(x, y)].$$

Inoltre, per quanto dimostrato, tale applicazione è biiettiva. Ricordiamo che vi è un'immersione di $M$ in $\mathbf{R}^3$, da cui vediamo che $M$ è compatto e quindi lo è anche $M'$. D'altronde, si può dimostrare esplicitamente che $X/\mathbf{Z}$ è di Hausdorff: siano $[(x, y)]$, $[(x', y')]$ due punti distinti di $X/\mathbf{Z}$ allora consideriamo i tre casi: i) $x, x' \notin \mathbf{Z}$, ii) $x \in \mathbf{Z}$ e $x' \notin \mathbf{Z}$, iii) $x, x' \in \mathbf{Z}$. Una volta dimostrato che $X/\mathbf{Z}$ è di Hausdorff, abbiamo un'applicazione continua e biunivoca da uno spazio compatto ad uno di Hausdorff, che dunque è chiusa, e pertanto un omeomorfismo.

9.3) Come gia' osservato durante l'Esercitazione 8, $X$ e' un cono quadrico di vertice $\vec{0}$.

(i) $X$ non puo' essere omeomorfo a $\mathbf{R}$ perche', per ogni $x \in X \setminus \{\vec{0}\}$, $X \setminus \{x\}$ e' connesso perche' connesso per archi. Invece, per ogni $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \setminus \{t\}$ e' sconnesso. $X$ non puo' essere omeomorfo a $\mathbf{R}^2$ perche' $X \setminus \{\vec{0}\}$ ha due componenti connesse mentre, per ogni $p \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$ e' connesso, perche' connesso per archi.

(ii) Consideriamo

$$C_1 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > 0, \;\; x^2 + y^2 < z^2\}$$

$$C_2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z < 0, \;\; x^2 + y^2 < z^2\}$$

$$C_3 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 > z^2\}.$$

$C_1$ e $C_2$ sono connessi, perche' convessi, mentre $C_3$ e' connesso per archi, quindi connesso. Inoltre $C_i$ e' aperto, per ogni $1 \leq i \leq 3$, perche' ogni suo punto e' interno. Poiche' $C_i \cap C_j = \emptyset$, per $i \neq j$, e poiche' $\mathbf{R}^3 \setminus X = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, allora ciascun $C_i$ e' anche chiuso in $\mathbf{R}^3 \setminus X$. Dunque $C_1$, $C_2$ e $C_3$ sono le tre componenti connesse di $\mathbf{R}^3 \setminus X$.

(iii) Notiamo che sia $\sigma$ che $\tau$ sono involuzioni, i.e. $\sigma^2 = \tau^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Pertanto hanno entrambi ordine 2. Il gruppo $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ e' il gruppo di Klein, dunque isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

(iv) Visto che l'equazione di $X$ e' omogenea, $G$ agisce su $X$. Ma visto che tutti gli elementi di $G$ fissano $\vec{0}$, allora $G$ agisce pure su $Y$, i.e. $Y$ e' un $G$-insieme. Vediamo che $G$ ha tutti stabilizzatori banali.

Se $g = \sigma$ oppure $g = \sigma\tau$,

$$g \cdot (x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \; z = 0,$$

ma $(x, y, 0) \notin Y$.

Se $g = \tau$,

$$g \cdot (x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \; x = y = 0,$$

ma $(0, 0, z) \notin Y$.

(v) Le componenti connesse di $Y$ sono $C_1$ e $C_2$. Poiche' $\sigma$ ha ordine 2, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbf{Z}_2$. L'identita' fissa ciascuna componente puntualmente, mentre $\sigma$ trasforma $C_i$ in $C_j$, $1 \leq i \neq j \leq 2$.

9.4) Ricordiamo che $X$ e' **convesso** se, $\forall \; \vec{x} \neq \vec{y} \in X \subseteq \mathbf{R}^n$, il segmento $\langle \vec{x}, \; \vec{y} \rangle$ congiungente i due punti e' interamente contenuto in $X$. Ricordiamo invece che, nelle lezioni di teoria, avete visto che $X$ e' uno spazio **contraibile** se e solo se l'applicazione $\mathrm{Id}_X$ e' omotopa ad un'applicazione costante $\epsilon_p$, per qualche $p \in X$.

(i) Poiche' $X$ convesso, dati comunque $\vec{x} \neq \vec{y} \in X \subseteq \mathbf{R}^n$, il segmento

$$\gamma : I = [0, 1] \to X, \;\; t \to t\vec{x} + (1 - t)\vec{y}$$

e' tale che $\gamma(I) \subset X$. Fissato un $\vec{x}_0 \in X$, per ogni $\vec{x} \in X$, possiamo considerare il segmento

$$\gamma_{\vec{x}}(t) := t\vec{x}_0 + (1 - t)\vec{x},$$

congiungente $\vec{x}_0$ con $\vec{x}$ (ovviamente se $\vec{x} = \vec{x}_0$, $\gamma_{\vec{x}_0}(t) := \vec{x}_0$, per ogni $t \in I$, i.e. e' il cammino costante). La collezione di cammini $\gamma_{\vec{x}}(t)$ fornisce un'omotopia

$$F : X \times I \to X \;\; (\vec{x}, t) \to t\vec{x}_0 + (1 - t)\vec{x}$$

tra l'applicazione continua $\mathrm{Id}_X$ e l'applicazione costante $\epsilon_{\vec{x}_0}$. Pertanto $X$ e' contraibile.

(ii) Poiche' $X$ e' contraibile, esiste un'omotopia $F : X \times I \to X$ tra l'applicazione continua $\mathrm{Id}_X$ e l'applicazione costante $\epsilon_{\vec{x}_0}$, per qualche $\vec{x}_0 \in X$. Pertanto, per ogni $\vec{x} \in X$ fissato,

$$F(\vec{x}, -) := \gamma_{\vec{x}} : \{\vec{x}\} \times I \cong I \to X$$

e' un cammino che congiunge $\vec{x}_0$ con $\vec{x}$, i.e. $X$ e' **connesso per archi**.

9.5) $a) \Rightarrow \;\; b)$ : Sia $H$ l'omotopia dell'asserto. Poiche' $H(\vec{x}, 1) = H(\vec{y}, 1)$, per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in S^1$, l'omotopia $H$ fattorizza attraverso il quoziente di $S^1 \times I$ modulo la relazione di equivalenza:

$$(\vec{x}, t) \sim (\vec{y}, s) \;\;\; \Leftrightarrow \;\;\; \text{o } (\vec{x}, t) = (\vec{y}, s) \;\text{ oppure }\; t = s = 1.$$

In altre parole, esiste un'applicazione continua

$$\widetilde{H} : \frac{S^1 \times I}{\sim} \to Y$$

che si solleva a $H$, i.e. $H = \widetilde{H} \circ \pi_\sim$, essendo $\pi_\sim : S^1 \times I \to \frac{S^1 \times I}{\sim}$ la proiezione canonica. Consideriamo ora l'applicazione

$$S^1 \times I \xrightarrow{h} \overline{B_1(\vec{0})}, \ \ (\vec{x}, t) \to (1-t)\vec{x}.$$

Notiamo che:

* $h$ e' continua e suriettiva,

* $h(\vec{x}, t) = h(\vec{y}, s) \ \Leftrightarrow \ (\vec{x}, t) \sim (\vec{y}, s)$

* $h$ e' chiusa, perche' $S^1 \times I$ e' compatto e $\overline{B_1(\vec{0})}$ e' $T_2$.

Per il **Teorema dei modelli**, esiste un unico omeomorfismo

$$\widetilde{h} : \frac{S^1 \times I}{\sim} \to \overline{B_1(\vec{0})}.$$

Prendiamo allora $\varphi := \widetilde{h}^{-1} : \overline{B_1(\vec{0})} \to \frac{S^1 \times I}{\sim}$ e consideriamo l'applicazione

$$g := \widetilde{H} \circ \varphi : \overline{B_1(\vec{0})} \to Y.$$

Essa e' continua, perche' composizione di applicazioni continue; inoltre, per ogni $\vec{x} \in S^1$ , si ha $\widetilde{H} \circ \varphi(\vec{x}) = H(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$ i.e. $g$ e' l'estensione cercata.

$b) \Rightarrow \ c)$: sia $g$ un'estensione di $f$ che esite per ipotesi. Fissiamo un $\vec{x}_0 \in S^1$ e sia $\vec{x} \in S^1$ un qualsiasi altro punto. La corda congiungente questi due punti e' descritta dall'applicazione continua:

$$I \to \overline{B_1(\vec{0})}, \quad t \to t\vec{x}_0 + (1-t)\vec{x}.$$

Definiamo allora

$$H : S^1 \times I \to Y, \ \ (\vec{x}, \ t) \to g(t\vec{x}_0 + (1-t)\vec{x}),$$

che fornisce un'omotopia tra $f$ e $\epsilon_{g(\vec{x}_0)} = \epsilon_{f(\vec{x}_0)}$, visto che $\vec{x}_0 \in S^1$ e visto che $g|_{S^1} = f$.

$c) \Rightarrow \ a)$: ovvia.

9.6) (i) Ricordiamo che $X_1$ e $X_2$ sono omotopicamente equivalenti se esistono due applicazioni continue

$$X_1 \overset{f_1}{\to} X_2 \quad \text{e} \quad X_2 \overset{f_2}{\to} X_1$$

e due omotopie

$$F_1 : X_1 \times I \to X_1 \quad \text{e} \quad F_2 : X_2 \times I \to X_2$$

tali che

$$f_2 \circ f_1 \sim_{F_1} \ \mathrm{Id}_{X_1} \ \text{ e } \ f_1 \circ f_2 \sim_{F_2} \ \mathrm{Id}_{X_2}.$$

Allo stesso modo, $Y_1$ e $Y_2$ sono omotopicamente equivalenti se esistono due applicazioni continue

$$Y_1 \overset{g_1}{\to} Y_2 \quad \text{e} \quad Y_2 \overset{g_2}{\to} Y_1$$

e due omotopie

$$G_1 : Y_1 \times I \to Y_1 \quad \text{e} \quad G_2 : Y_2 \times I \to Y_2$$

tali che

$$g_2 \circ g_1 \sim_{G_1} \ \mathrm{Id}_{Y_1} \ \text{ e } \ g_1 \circ g_2 \sim_{G_2} \ \mathrm{Id}_{Y_2}.$$

Definiamo l'applicazione

$$X_1 \times Y_1 \times I \xrightarrow{H_1} X_1 \times Y_1, \quad (x_1, y_1, t) \to (F_1(x_1, t), G_1(y_1, t))$$

che e' continua perche' a componenti continue. Essa definisce un'omotopia tra $(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$ e $\mathrm{Id}_{X_1 \times Y_1}$, i.e.

$$(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) \sim_{H_1} \mathrm{Id}_{X_1 \times Y_1}.$$

Allo stesso modo, definiamo l'applicazione

$$X_2 \times Y_2 \times I \xrightarrow{H_2} X_2 \times Y_2, \quad (x_2, y_2, t) \to (F_2(x_2, t), G_2(y_2, t))$$

continua perche' a componenti continue e che definisce un'omotopia tra $(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2)$ e $\mathrm{Id}_{X_2 \times Y_2}$, i.e.

$$(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) \sim_{H_2} \mathrm{Id}_{X_2 \times Y_2}.$$

Pertanto

$$X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2.$$

(ii) A meno di un'isometria di $\mathbf{R}^3$, possiamo supporre che la retta $\ell$ coincida con l'asse $z$ di equazioni cartesiane $x = 0 = y$. In tale eventualita',

$$\mathbf{R}^3 \setminus \ell = \{(x, y, z) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Pertanto si ha l'omeomorfismo naturale:

$$\mathbf{R}^3 \setminus \ell \xrightarrow{\cong} (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbf{R}, \qquad (x, y, z) \longrightarrow ((x, y),\ z).$$

Ora abbiamo:

• $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e' omotopicamente equivalente a $S^1$, tramite le applicazioni

$$f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S^1, \ \ \vec{x} \to \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

e

$$\iota : S^1 \hookrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \ \vec{y} \to \vec{y}.$$

• $\mathbf{R}$ e' invece contraibile, perche' convesso (vedasi Esercizio 9.4). Pertanto $\mathbf{R}$ e' omotopicamente equivalente a $\{0\}$.

Utilizzanto il punto (i), abbiamo che $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbf{R}$ e' omotopicamente equivalente a $S^1 \times \{0\}$. Riassumendo, abbiamo:

$$\mathbf{R}^3 \setminus \ell \cong \Big(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\Big) \times \mathbf{R} \sim_H S^1 \times \{0\} \cong S^1.$$

9.7) (i) Riprendendo l'Esercizio 9.3), notiamo che $Z$ ha componenti connesse $C_1$ e $C_2$. Pertanto non e' connesso.

(ii) Considerando invece $\mathbf{R}^3 \setminus Z$, notiamo che esso e' **stellato** rispetto a $\vec{0}$, i.e. per ogni $\vec{x} \in X := \mathbf{R}^3 \setminus Z$ tale che $\vec{x} \neq \vec{0}$, il segmento $\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle$ e' interamente contenuto in $\mathbf{R}^3 \setminus Z$. Essere stellato rispetto a $\vec{0}$ equivale ad avere un'omotopia tra $\mathrm{Id}_X$ e $\epsilon_{\vec{0}}$, i.e. $X$ e' contraibile. Per l'Esercizio 9.4) allora e' anche connesso per archi e dunque e' anche connesso. In definitiva

stellato $\Rightarrow$ contraibile $\Rightarrow$ connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

9.8) (i) Abbiamo $f(x), g(x) \in S^n$ e consideriamo il segmento congiungente questi due punti

$$\langle f(x), g(x) \rangle \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Esso e' dato dall'applicazione

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^{n+1}, \ \ tg(x) + (1-t)f(x).$$

Come sopra, questo determina un'applicazione continua

$$F : X \times I \to \mathbf{R}^{n+1}, \;\; (x,t) \to tg(x) + (1-t)f(x).$$

Notiamo pero' che il segmento $\gamma(t)$ sopra definito e' tale che

$$\gamma(t) \neq \vec{0}, \; \forall \, t \in I.$$

Infatti:

• per $t = 0$, $\gamma(0) = f(x) \in S^n$, quindi $f(x) \neq \vec{0}$,

• per $t = 1$, $\gamma(1) = g(x) \in S^n$, quindi $g(x) \neq \vec{0}$,

• per $0 < t < 1$, poiche' per ipotesi $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$, i punti $f(x)$ e $g(x)$ non sono mai antipodali sulla (iper)sfera $S^n$, i.e. il segmento $\langle f(x), g(x) \rangle$ non e' mai un diametro di $S^n$, per ogni $x \in X$. In particolare il segmento $\langle f(x), g(x) \rangle$ non passa mai per $\vec{0}$ Quindi $\langle f(x), g(x) \rangle \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$.

Pertanto l'applicazione continua $F$ precedentemente definita e', piu' precisamente,

$$F : X \times I \to \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \;\; (x,t) \to tg(x) + (1-t)f(x).$$

Consideriamo ora la proiezione

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \to S^n, \;\; \vec{x} \to \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

che e' continua, perche' a componenti continue, e suriettiva.

Abbiamo dunque un'applicazione continua

$$\pi \circ F : X \times I \to S^n, \;\; (x,t) \to \frac{tg(x) + (1-t)f(x)}{|tg(x) + (1-t)f(x)|}$$

che fornisce un'omotopia tra $f$ e $g$.

(ii) Se $f$ non suriettiva, allora $S^n \setminus \mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$. Denotiamo con $-\vec{x}_0$ un elemento qualsiasi in $S^n \setminus \mathrm{Im}(f)$. Pertanto,

$$f(x) \neq -\vec{x}_0 = -\epsilon_{\vec{x}_0}(x), \;\; \forall \, x \in X.$$

Dal punto (i), abbiamo che $f$ e' omotopa a $\epsilon_{\vec{x}_0}$.