Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 8 Esercizi

[1]

8.1) Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici, tale che Y sia connesso e, per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ sia connesso. Dimostra che, se f è aperta o chiusa, allora anche il dominio X è connesso.

8.2) Dimostra le seguenti affermazioni:

(i) Sia $\mathbf{R}^n$ spazio topologico dotato di topologia euclidea $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$. Ogni sottoinsieme $C \subseteq \mathbf{R}^n$ convesso e' connesso per archi.

(ii) Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico connesso per archi e sia $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}$. Allora $(X,\mathcal{U}')$ e' connesso per archi.

(iii) Si consideri lo spazio topologico X dato da $\mathbf{R}$ dotato di topologia $\mathcal{U}_{\text{Cof}}$ cofinita. Allora X e' connesso per archi.

(iv) Se X e' uno spazio topologico discreto, con cardinalita' almeno 2, allora X non e' connesso per archi.

8.3) Sia $\mathbf{R}^2$ spazio topologico dotato di topologia euclidea $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$. Considera i seguenti sottospazi topologici:

a) $S_1 = \{(x, y) \,|\, xy \neq 0\}$;

b) $S_2 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \neq 1\}$;

c) $S_1 \cap S_2$.

Allora:

(i) determina il numero di componenti connesse di ciascuno dei precedenti sottospazi;

(ii) deduci che, a due a due, i sottospazi S_i, $1 \leq i \leq 3$, non sono omeomorfi.

8.4) Considera due applicazioni quoziente $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ tra spazi topologici. Mostra che la composizione $g \circ f : X \to Z$ è una applicazione quoziente.

8.5) Considera i sottoinsiemi X e Y di $\mathbf{R}^3$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad Y = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

Su X si consideri la relazione di equivalenza:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \;\Leftrightarrow\; (x, y, z) = (x', y', z') \text{ oppure } z = z' = 0.$$

Mostra che $X/\sim$ è omeomorfo a Y.

8.6) Sia $f : X \to Y$ una applicazione quoziente tra spazi topologici. Mostra che, se le componenti connesse di X sono aperte, anche le componenti connesse di Y sono aperte.

8.7) Sia X uno spazio topologico e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Sia $p : X \to Y = X/A$ la proiezione canonica (tramite la relazione $x\rho y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in A$). Mostra che

i) Per ogni $S \subset X$, si ha $p^{-1}p(S) \subseteq S \cup A$.

ii) Se A è aperto in X, allora p è una applicazione aperta.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

iii) Se A non è aperto in X e p è aperta, allora $\mathring{A} = \emptyset$.

iv) Se $X = \mathbf{R}$ e $A = \mathbf{Q}$, allora A ha interno vuoto, ma p non é aperta né chiusa.

v) Se X è compatto e di Hausdorff e A è chiuso, allora X/A è compatto e di Hausdorff

8.8) In $\mathbf{R}$ dotato della topologia euclidea, si consideri il sottospazio $X = \mathbf{R} \setminus [-1,\ 1]$. Sia inoltre $S := X \cap [-2,\ 2] \subset X$. Consideriamo lo spazio topologico X/S dotato della topologia quoziente indotta dalla relazione di equivalenza data dal sottoinsieme S.

Dimostrare che X e' sconnesso, ma che invece X/S e' connesso.

8.9) Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e $p \in X$. Sia $U := X \setminus \{p\}$. Dimostra che la compattificazione di Alexandroff U^∞ è omeomorfa ad X.