Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 8 Esercizi - SVOLGIMENTI

[1]

8.1) Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici, tale che Y sia connesso e, per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ sia connesso. Dimostra che, se f è aperta o chiusa, allora anche il dominio X è connesso.

8.2) Dimostra le seguenti affermazioni:

(i) Sia $\mathbf{R}^n$ spazio topologico dotato di topologia euclidea $\mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}$. Ogni sottoinsieme $C \subseteq \mathbf{R}^n$ convesso e' connesso per archi.

(ii) Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico connesso per archi e sia $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}$. Allora $(X,\mathcal{U}')$ e' connesso per archi.

(iii) Si consideri lo spazio topologico X dato da $\mathbf{R}$ dotato di topologia $\mathcal{U}_{\mathrm{Cof}}$ cofinita. Allora X e' connesso per archi.

(iv) Se X e' uno spazio topologico discreto, con cardinalita' almeno 2, allora X non e' connesso per archi.

8.3) Sia $\mathbf{R}^2$ spazio topologico dotato di topologia euclidea $\mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}$. Considera i seguenti sottospazi topologici:

a) $S_1 = \{(x, y) \mid xy \neq 0\}$;

b) $S_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$;

c) $S_1 \cap S_2$.

Allora:

(i) determina il numero di componenti connesse di ciascuno dei precedenti sottospazi;

(ii) deduci che, a due a due, i sottospazi S_i, $1 \leq i \leq 3$, non sono omeomorfi.

8.4) Considera due applicazioni quoziente $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ tra spazi topologici. Mostra che la composizione $g \circ f : X \to Z$ è una applicazione quoziente.

8.5) Considera i sottoinsiemi X e Y di $\mathbf{R}^3$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad Y = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

Su X si consideri la relazione di equivalenza:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \;\Leftrightarrow\; (x, y, z) = (x', y', z') \text{ oppure } z = z' = 0.$$

Mostra che $X/\sim$ è omeomorfo a Y.

8.6) Sia $f : X \to Y$ una applicazione quoziente tra spazi topologici. Mostra che, se le componenti connesse di X sono aperte, anche le componenti connesse di Y sono aperte.

8.7) Sia X uno spazio topologico e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Sia $p : X \to Y = X/A$ la proiezione canonica (tramite la relazione $x\rho y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in A$). Mostra che

i) Per ogni $S \subset X$, si ha $p^{-1}p(S) \subseteq S \cup A$.

ii) Se A è aperto in X, allora p è una applicazione aperta.

[1]Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

iii) Se A non è aperto in X e p è aperta, allora $\mathring{A} = \emptyset$.

iv) Se $X = \mathbf{R}$ e $A = \mathbf{Q}$, allora A ha interno vuoto, ma p non é aperta né chiusa.

v) Se X è compatto e di Hausdorff e A è chiuso, allora X/A è compatto e di Hausdorff

8.8) In $\mathbf{R}$ dotato della topologia euclidea, si consideri il sottospazio $X = \mathbf{R} \setminus [-1,\ 1]$. Sia inoltre $S := X \cap [-2,\ 2] \subset X$. Consideriamo lo spazio topologico X/S dotato della topologia quoziente indotta dalla relazione di equivalenza data dal sottoinsieme S.

Dimostrare che X e' sconnesso, ma che invece X/S e' connesso.

8.9) Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e $p \in X$. Sia $U := X \setminus \{p\}$. Dimostra che la compattificazione di Alexandroff U^{∞} è omeomorfa ad X.

Svolgimenti

8.1) Supponiamo dapprima che f sia aperta e ragioniamo per assurdo. Siano A_1 e A_2 aperti non vuoti disgiunti di X tali che $X = A_1 \cup A_2$. Poiché f è aperta, i sottoinsiemi $f(A_1)$ e $f(A_2)$ sono aperti di Y.

Se $f(A_1),\ f(A_2) \subset Y$, essi sono aperti non vuoti di Y che costituiscono un ricoprimento aperto di Y (perche' f aperta e suriettiva). Ma $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ (altrimenti ogni $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ sarebbe tale che $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cap A_2$ che invece per ipotesi erano disgiunti); questo contraddirrebbe l'ipotesi di Y connesso.

Ma allora almeno uno dei due, sia e.g. $f(A_1)$, deve coincidere con tutto Y. In questa eventualita', se $f(A_2) \subset f(A_1) = Y$, allora per ogni $y \in f(A_2)$ raggiungeremmo assurdo come nel caso precedente.

Ma allora la possibilita' residua e' che $f(A_1) = f(A_2) = Y$. Per ogni $y \in Y$ avremmo

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y) \cap A_2)$$

dove $(f^{-1}(y) \cap A_1)$, $(f^{-1}(y) \cap A_2)$ entrambi aperti non vuoti di $f^{-1}(y)$ e disgiunti, perche' A_1 e A_2 lo sono. Questo contraddirrebbe l'ipotesi di connessione di $f^{-1}(y)$, per ogni $y \in Y$.

Pertanto X e' connesso.

Supponiamo ora che f sia chiusa e ragioniamo per assurdo come sopra. Siano A_1 e A_2 aperti non vuoti disgiunti di X tali che $X = A_1 \cup A_2$. Allora $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono anche chiusi di X. Poiché f è chiusa, i sottoinsiemi $f(A_1)$ e $f(A_2)$ sono chiusi di Y.

Se fosse $f(A_1),\ f(A_2) \subset Y$, essi necessariamente devono avere intersezione non vuota per via della connessione di Y, ma allora ogni punto nella intersezione darebbe $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cap A_2$, un assurdo. Se fosse $f(A_2) \subset f(A_1) = Y$, allora per ogni $y \in f(A_2)$ raggiungeremmo di nuovo un assurdo. La possibilita' residua e' che $f(A_1) = f(A_2) = Y$ che porta ad un assurdo come nel caso di f aperta. Dunque, anche in questo caso X e' connesso.

8.2) (i) Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice **convesso** se per ogni $\vec{x} \neq \vec{y}$, il segmento congiungente i due punti e' interamente contenuto in C. Notiamo che tale segmento e' parametrizzato da

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n,\ \ t \to \gamma(t) := (1-t)\vec{x} + t\vec{y}.$$

Quando dotiamo $[0,1]$ della topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}$, l'applicazione γ e' applicazione continua.

(ii) Per ogni $x \neq y \in X$, esiste un cammino $\gamma : I \to (X, \mathcal{U})$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, visto che lo spazio topologico e' per ipotesi connesso per archi. Consideriamo l'applicazione identita':

$$id_X : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{U}'),\ \ x \to x.$$

Essa e' continua, visto che $\mathcal{U}'$ e' meno fine di $\mathcal{U}$.

Ma allora, $id_X \circ \gamma : I \to (X,\mathcal{U}')$ e' un arco connettente x con y in $(X,\mathcal{U}')$.

(iii) Poiche' $\mathcal{U}_{\text{Cof}}$ e' strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbf{R}$, l'asserzione discende direttamente dal punto (ii).

(iv) Poiche' X ha la topologia discreta, per ogni $x \in X$ si ha che $\{x\}$ e' sia aperto che chiuso. Pertanto X e' totalmente sconnesso, visto che ha cardinalita' strettamente maggiore di 1. Dunque non puo' essere connesso per archi.

8.3) (i) Determiniamo il numero di componenti connesse di tutti i sottospazi menzionati.

a) S_1 è il piano euclideo cui sono state rimossi i due assi. Pertanto S_1 e' l'unione dei quattro quadranti:

$$C_1 = \{(x,y) \mid x,y > 0\}, \quad C_2 = \{(x,y) \mid x > 0,\ y < 0\},$$
$$C_3 = \{(x,y) \mid x < 0,\ y > 0\}, \quad C_4 = \{(x,y) \mid x,y < 0\}.$$

E' facile vedere che i quattro quadranti sono a due a due omeomorfi. Quindi e' sufficiente concentrarsi su C_1.

Notiamo che

- C_1 e' connesso perche' e' convesso.
- C_1 e' aperto, visto che ogni suo punto e' interno
- Poiche' ogni C_i, $1 \leq i \leq 4$ e' aperto, allora $C_2 \cup C_3 \cup C_4$ e' aperto di S_1, quindi $C_1 = S_1 \setminus (C_2 \cup C_3 \cup C_4)$ e' anche chiuso in S_1.

Da cio' deduciamo che C_1 e' una componente connessa di S_1: per ogni $A \subset S_1$ sottospazio connesso t.c. $C_1 \subseteq A$ deve necessariamente valere $A = C_1$ altrimenti, se l'inclusione fosse stretta, A conterrebbe il chiuso-aperto non banale C_1 e questo contraddice la connessione di A.

Pertanto S_1 ha 4 componenti connesse.

b) S_2 è il piano euclideo cui è stata rimossa la circonferenza unitaria pertanto $S_2 = D_1 \cup D_2$, dove:

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\} = B_1(\vec{0}), \quad D_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\} = \overline{B_1(\vec{0})}^c.$$

Ora, D_1 e' connesso; D_2 e' connesso per archi, dunque e' connesso. Sono entrambi aperti, e dunque anche chiusi in S_2. Come per S_1, si deduce che sono componenti connesse; dunque S_2 ha due componenti connesse,

c) $S_1 \cap S_2$ è il piano euclideo cui sono stati rimossi i due assi coordinati e la circonferenza unitaria, pertanto ha 8 componenti connesse.

(ii) Poiche' il numero di componenti connesse e' una **proprieta' topologica**, i.e. si conserva per omeomorfismo, deduciamo che i tre sottospazi non sono a due a due omeomorfi.

8.4) Ricordiamo che un'applicazione $h : X \to Y$ si dice **quoziente** se è suriettiva e se un sottoinsieme $U \subset Y$ è aperto se e solo se $f^{-1}(U)$ è aperto in X.

Chiaramente, se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue e suriettive, anche la loro composizione è tale. Quindi, in particolare, se $U \subseteq Z$ è aperto, anche $(g \circ f)^{-1}(U)$ è aperto.

Sia ora $U \subseteq Z$ tale che $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ è aperto. Allora poiché f è un'applicazione quoziente l'insieme $g^{-1}(U)$ è aperto in Y poiché g è un'applicazione quoziente anche l'insieme U è aperto in Z.

8.5) Definiamo prima un'applicazione da X ad Y:

$$f : X \to Y, \quad (x, y, z) \mapsto (zx, zy, z).$$

• Si vede immediatamente che f è ben definita, poiché se $x^2 + y^2 = 1$, allora $(zx)^2 + (zy)^2 = z^2(x^2 + y^2) = z^2$;

• Inoltre f e' suriettiva su Y.

• f è continua: infatti essa e' restrizione dell'applicazione globale

$$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \ \ (x, y, z) \mapsto (zx, zy, z)$$

che è continua, poiché continua su ogni componente, la continuità sulle prime due componenti viene dal fatto che il prodotto di funzioni continue è a sua volta continuo. Si conclude ricordando che la restrizione di una funzione continua è continua

• Osserviamo che f è tale che $f(x, y, 0) = (0, 0, 0)$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$, ovvero f è costante sulle classi di $\sim$-equivalenza di X.

• f e' chiusa: X e' compatto perche' X è chiuso e limitato in $\mathbf{R}^3$. Se $K \subseteq X$ e' un qualsiasi chiuso di X, allora K e' compatto. Poiche' f e' continua e K compatto, segue che $f(K) \subseteq Y$ e' compatto. Ma Y e' T_2, perche' sottospazio topologico di $\mathbf{R}^3$ che e' T_2, dunque $f(K)$ e' chiuso in Y.

Per il **Teorema dei Modelli**, f induce un omeomorfismo

$$\tilde{f} : X/\sim \ \to \ Y.$$

Possiamo verificare direttamente che $\tilde{f}$ e' un omeomorfismo

Notiamo che $f = \tilde{f} \circ \pi_\sim$, dunque poiche' f e $\pi_s im$ continue, $\tilde{f}$ e' continua per **proprieta' universale della topologia queziente**.

Notiamo inoltre che $\tilde{f}$ è biunivoca e che $X/\sim$ essendo quoziente di uno spazio compatto è compatto a sua volta. Poiché $\mathbf{R}^3$ dotato della topologia euclidea è Hausdorff, anche Y è Hausdorff. Per concludere ricordiamo che una funzione continua e biunivoca da uno spazio compatto ad uno di Hausdorff è un omemorfismo (infatti date le ipotesi rimane da mostrare che $\tilde{f}$ è chiusa: se $K \subseteq X/\sim$ è chiuso, allora essendo $X/\sim$ compatto deve anche essere compatto e lo stesso vale per la sua immagine $\tilde{f}(K)$, che però è un compatto in uno spazio di Hausdorff, dunque un chiuso).

8.6) Mostriamo prima di tutto che se $f : X \to Y$ è un'applicazione quoziente, allora la preimmagine di una componente connessa è unione di componenti connesse. Sia dunque $C \subseteq Y$ una componente connessa, sia $x \in f^{-1}(C)$ e sia D_x la sua componente connessa. La sua immagine $f(D_x)$ è a sua volta connessa ed interseca non banalmente C, poiché contiene $f(x) \in C$.

Pertanto deduciamo che $f(D_x) \subseteq C$; infatti, se cosi' non fosse, $C \cup f(D_x)$ sarebbe un connesso (unione di due connessi ad intersezione non vuota) che conterrebbe propriamente C, contraddicendo il fatto che C e' una componente connessa.

Dalla precedente inclusione, otteniamo $D_x \subseteq f^{-1}(f(D_x)) \subseteq f^{-1}(C)$. Abbiamo allora mostrato che per ogni elemento $x \in f^{-1}(C)$ la componente connessa D_x cui appartiene è interamente contenuta in $f^{-1}C$ e quindi $\bigcup_{x \in f^{-1}C} D_x \subseteq f^{-1}(C)$.

D'altronde, $x \in D_x$ e quindi $f^{-1}C \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}C} D_x$.

Dalle inclusioni precedenti segue che $f^{-1}(C) = \bigcup_{x \in f^{-1}C} D_x$, che è aperto poiché unione di aperti (per ipotesi ogni componente connessa di X è aperta).

A questo punto, poiché f è un'applicazione quoziente, per definizione $U \subseteq Y$ è aperto se e solo se $f^{-1}(U)$ è aperto e quindi C deve essere aperta.

8.7) i) Se $S \cap A = \emptyset$, allora $p^{-1}p(S) = S$. Se, invece, esiste un $a \in S \cap A$ e denotiamo con $[a] = p(a)$ la sua classe in $Y = X/\sim$ allora $p^{-1}([a]) = A$ e quindi $S = (S \setminus A) \cup (S \cap A) \subseteq S \cup A$.

ii) Sia U un aperto di X. Allora se mostriamo che $f^{-1}(f(U))$ è aperto, la definizione di topologia quoziente implica $f(U)$ aperto. Se $U \cap A = \emptyset$, allora $f^{-1}(f(U)) = U$, che è aperto. Se, invece, esiste un $a \in U \cap A$, abbiamo che $f^{-1}(f(U)) = U \cup A$ che è aperto se A è aperto. Abbiamo dunque fatto vedere che per ogni U aperto di X la sua immagine $f(U)$ è aperta in Y.

iii) Se f è aperta, allora $f(\overset{\circ}{A})$ è aperto e la sua preimmagine $f^{-1}(f(\overset{\circ}{A}))$ deve essere aperta poiché f è continua. Assumiamo ora per assurdo che $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Allora $f(\overset{\circ}{A}) \neq \emptyset$ ed $f^{-1}(f(\overset{\circ}{A})) = A$, che è un assurdo poiché A non è aperto.

iv) Prima di tutto ricordiamo che $\mathbf{Q}$ non è né chiuso, né aperto in $\mathbf{R}$. Allora vediamo subito che p non può essere chiusa perché $p^{-1}(p(1)) = \mathbf{Q}$ e quindi $p(1)$ non è chiuso, mentre i punti sono chiusi in $\mathbf{R}$ (con la topologia euclidea). Inoltre $p^{-1}(p(0,1)) = [0,1] \cup \mathbf{Q}$, che non è aperto poiché non esiste un aperto di $\mathbf{R}$ che contiene 0 ed è interamente contenuto in $[0,1] \cap \mathbf{Q}$. Ne deduciamo che p non è né aperta né chiusa.

v) Se X è compatto, allora anche X/A è compatto poiché immagine continua di un compatto. Siano ora $[x] \neq [y] \in X/A$. Se $p^{-1}[x] = \{x\}$ e $p^{-1}([y]) = \{y\}$ allora $x, y \in X \setminus A$ e, poiché X è di Hausdorff, troviamo due aperti disgiunti U_x, U_y tali che $x \in U_x$, $y \in U_y$. Poiché A è chiuso, $X \setminus A$ è aperto e possiamo supporre che $U_x, U_y \subseteq X \setminus A$. Allora $U_x = p^{-1}(p(U_x))$ e $U_y = p^{-1}(p(U_y))$ implica che $p(U_x)$ e $p(U_y)$ sono due aperti di X/A che devono essere disgiunti, poiché p è una biiezione su $X \setminus A$. Per concludere dobbiamo considerare il caso in cui $p^{-1}([x]) = \{x\}$ e $p^{-1}[y] = A$. Poiché X è di Hausdorff, per ogni $a \in A$ troviamo aperti V_a, U_a di X tali che $a \in V_a$, $x \in U_a \subseteq X \setminus A$. Abbiamo allora un ricoprimento aperto $A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$ e poiché A è un chiuso in uno spazio compatto di Hausdorff è a sua volta compatto. Ne deduciamo che esistono $a_1, \ldots, a_r$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} V_{a_i}.$$

Inoltre, $(\bigcup_{i=1}^r V_{a_i}) \cap (\bigcap_{i=1}^r U_{a_i}) = \emptyset$. Ma adesso è immediato vedere che $p^{-1}(p(\bigcup_{i=1}^r) V_{a_i}) = \bigcup_{i=1}^r V_{a_i}$ e che $p^1(p(\bigcap_{i=1}^r U_{a_i})$, quindi $p(\bigcup_{i=1}^r) V_{a_i}$ e $p(\bigcap_{i=1}^r U_{a_i})$ sono aperti e disgiunti.

8.8) Notiamo che X e' l'unione disgiunta di $(-\infty, -1)$ e di $(1, +\infty)$, che sono aperti in $\mathbf{R}$ e dunque in X. Pertanto X e' sconnesso.

Sia $\pi_S : X \to X/S$ la proiezione canonica indotta da S. Denotiamo con $\xi := \pi_S(s)$, $s \in S$, la classe di equivalenza individuata da S. Insiemisticamente abbiamo che

$$X/S = (-\infty, -2) \cup \{\xi\} \cup (2, +\infty).$$

Consideriamo un qualsiasi $x \in \mathbf{R} \setminus [-2,\ 2]$.

Se $x > 2$, allora $[2,\ x]$ e' un connesso in X, quindi $\pi_S([2,\ x])$ e' connesso in X/S. Ma $\xi = \pi_S(2) \in \pi_S([2,\ x])$ e anche $\pi_S(x) = x \in \pi_S([2,\ x])$. Se $x < -2$ si ragiona analogamente.

Pertanto, ogni $\pi_S(x) = x \in X/S \setminus \{\xi\}$ appartiene ad un connesso che contiene ξ. Dunque, la componente connessa C_ξ in X/S individuata da ξ contiene tutto X, i.e. X e' connesso.

8.9) $U^\infty := U \cup \{\infty\}$ e la sua topologia e' $\mathcal{U}^\infty$ definita come in **Esercizio 7.2** del foglio 7. In particolare, abbiamo verificato che U, con la topologia indotta da X, e' sottospazio di $(U^\infty, \mathcal{U}^\infty)$.

Definiamo una biiezione $f : U^\infty \to X$ tale che

$$f(u) = u, \ \ \forall\ u \in U \ \text{ e } \ f(\infty) = p.$$

Dimostriamo che f e' continua. Ovviamente $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(X) = U^\infty$. Sia ora A un aperto non vuoto di X contenuto in $U = X \setminus \{p\}$ allora $f^{-1}(A) = A$ perche' f e' l'identita' su U. Poiche'

U e' sottospazio di $(U^\infty, \mathcal{U}^\infty)$, allora A e' anche aperto in $(U^\infty, \mathcal{U}^\infty)$. Sia ora A un aperto di X, non coincidente con X, e contenente p. Allora $f^{-1}(A) = (A \setminus \{p\}) \cup \{\infty\}$. Ora

$$U \setminus (A \setminus \{p\}) = (X \setminus \{p\}) \setminus (A \setminus \{p\}) = X \setminus A \subset X,$$

e $X \setminus A$ e' un chiuso (perche' A aperto) di X, che per ipotesi e' compatto. Dunque $X \setminus A = U \setminus (A \setminus \{p\})$ e' chiuso e compatto di U. Per definizione di $\mathcal{U}^\infty$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}^\infty$, i.e. e' aperto in U^∞. Dunque f e' continua.

Dimostriamo che f e' aperta. Ovviamente $f(\emptyset) = \emptyset$ e $f(U^\infty) = X$. Sia ora B un aperto non vuoto di $\mathcal{U}^\infty$ contenuto in U allora $f(B) = B$, che e' aperto in U^∞ perche' U sottospazio. Sia invece B un aperto di U^∞, non coincidente con U^∞, contenente $\{\infty\}$. Per definizione di topologia $\mathcal{U}^\infty$, esiste dunque $V \subset U$ sottoinsieme tale che $B = V \cup \{\infty\}$, con $U \setminus V$ chiuso e compatto di U. Allora si ha $f(B) = V \cup \{p\} \subseteq X$. Dobbiamo dimostrare che $V \cup \{p\}$ e' aperto in X. Notiamo che

$$X \setminus (V \cup \{p\}) = (X \setminus \{p\}) \cup V = U \setminus V$$

e' un compatto di U e dunque e' un compatto di X, che e' T_2. Dunque $U \setminus V = X \setminus (V \cup \{p\})$ e' chiuso (e compatto) in X. Pertanto $V \cup \{p\}$ e' aperto e dunque f e' aperta.