Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 7 Esercizi - PROPRIETA' UTILE PER SVOLGIMENTO
ESERCIZIO 7.5 RICHIESTA DA STUDENTI

Discutiamo una proprieta' generale che serve per lo svolgimento del seguente esercizio nel foglio 7.

7.5) *Considera un sottospazio connesso $A$ di uno spazio topologico $X$. Dimostra che se $Y$ è un sottospazio di $X$ tale che $A \subseteq Y \subseteq \overline{A}$, allora $Y$ è connesso.*

Consideriamo preliminarmente la seguente proprieta':

**Proprieta'** *Sia $V$ uno spazio topologico. Si consideri un sottospazio $Z \subseteq V$ tale che $Z = C \cup D$, dove $C$ e $D$ due aperti disgiunti di $Z$ (i.e. $Z$ sconnesso). Si denotino con $\overline{C}$ e con $\overline{D}$, rispettivamente, le chiusure di $C$ e di $D$ in $V$. Allora*

$$\overline{C} \cap D = \overline{D} \cap C = \emptyset.$$

**Dimostrazione proprieta'**. Poiche' $Z$ e' sconnesso, $C$ e $D$ sono anche chiusi di $Z$. Ricordiamo che, per definizione di chiusura di $C$ in $V$, $\overline{C}$ e' il piu' piccolo chiuso di $V$ che contiene $C$. Pertanto, per definizione di topologia indotta su un sottospazio, abbiamo

$$C = \overline{C} \cap Z,$$

visto che $C$ e' gia' chiuso in $Z$. Usando ora il fatto che $D \subset Z$, si ha

$$\overline{C} \cap D = \overline{C} \cap (Z \cap D) = (\overline{C} \cap Z) \cap D = C \cap D = \emptyset.$$

In modo del tutto analogo si dimostra $\overline{D} \cap C = \emptyset$.

**Svolgimento 7.5** Supponiamo che vi siano $Y_1, Y_2 \subseteq Y$, aperti (nella topologia indotta su $Y$) tali che $Y = Y_1 \cup Y_2$ e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Notiamo prima di tutto che per $i = 1, 2$, essendo $Y_i \subseteq \overline{A}$, deve valere $\overline{Y_i} \subseteq \overline{A} \subset X$ e dunque $\overline{Y_i} \cap \overline{A} = \overline{Y_i}$.

Chiaramente, $A = (Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A)$, con $Y_i \cap A$ $(i = 1, 2)$ aperto nella topologia indotta su $A$, e vale

$$(Y_1 \cap A) \cap (Y_2 \cap A) = (Y_1 \cap Y_2) \cap A = \emptyset.$$

Ma abbiamo assunto che $A$ fosse connesso. Pertanto o $A = A \cap Y_1$ oppure $A = A \cap Y_2$. Senza perdita di generalità, supponiamo che $A = A \cap Y_1$, da cui segue che $A \subseteq Y_1$ e quindi $\overline{A} \subseteq \overline{Y_1}$. Ma avevamo $Y_1 \subseteq Y \subseteq \overline{A}$ e pertanto $\overline{Y_1} = \overline{A}$.

Ricordando la proprieta' sopra dimostrata, se prendiamo $C = Y_1$, $D = Y_2$, $Z = Y$, allora $\overline{Y_1} \cap Y_2 = \emptyset$, da cui $Y_2 = Y_2 \cap \overline{A} = Y_2 \cap \overline{Y_1} = \emptyset$. Ne deduciamo che $Y$ è connesso.