Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 7 Esercizi

[1]

7.1) Determina uno spazio topologico X e una famiglia numerabile di compatti di X la cui unione non sia compatta in X.

7.2) * Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia ∞ un elemento che non appartiene a X. Sull'insieme $X^\infty = X \cup \{\infty\}$, considera la famiglia di sottoinsiemi

$$\mathcal{U}^\infty = \mathcal{U} \cup \{A \cup \{\infty\} \,|\, A \subseteq X, X \setminus A \text{ chiuso e compatto in } X\}.$$

Lo spazio topologico $(X^\infty,\mathcal{U}^\infty)$ è detto **compattificazione di Alexandroff di X con un punto** di $(X,\mathcal{U})$. Dimostra che:

i) La famiglia $\mathcal{U}^\infty$ è una topologia su X^∞, rispetto alla quale X^∞ è compatto (**visto a lezione con Prof.ssa Tovena**)

ii) Lo spazio $(X,\mathcal{U})$ è un sottospazio topologico di X^∞.

iii) Utilizzando la proiezione stereografica e considerando la topologia indotta dalla topologia euclidea, dimostra che la sfera $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ è omemorfa alla **compattificazione di Alexandroff con un punto di $\mathbf{R}^2$**.

7.3) Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico. Diciamo che una applicazione $f : X \to \mathbf{R}$ è **superiormente semicontinua** se $f^{-1}(-\infty, a)$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbf{R}$.

Siano $\mathcal{U}_{\text{SSA}} = \mathcal{T}_s$ e $\mathcal{U}_{\text{SDA}} = \mathcal{T}_d$ le topologie su $\mathbf{R}$ degli intervalli aperti illimitati a sinistra (**Semirette sinistre aperte**), risp., a destra (**Semirette destre aperte**).

i) Dimostra che $f : X \to \mathbf{R}$ è superiormente semicontinua se e solo se, per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}$, esiste un intorno U di x in X tale che $f(y) < f(x) + \varepsilon$ per ogni $y \in U$.

ii) Dimostra che $f : X \to \mathbf{R}$ è superiormente semicontinua se e solo se $f : X \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$ è continua.

iii) Mostra che l'applicazione $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ definita da $x \mapsto -x$ è continua.

iv) Mostra che una applicazione $f : X \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ è continua (e in tal caso, la chiamiamo **inferiormente semicontinua**) se e solo se $-f$ è superiormente semicontinua.

7.4) * Considera la topologia euclidea su $\mathbf{R}^2$. Quali dei seguenti sottospazi sono connessi? quali sono connessi per archi? quali sono compatti?

a) $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;

b) $Y_2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, |y| > 0\}$;

c) $Y_3 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, y = 0\}$;

d) $Y_4 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \,|\, |y| > 0\}$.

7.5) * Considera un sottospazio connesso A di uno spazio topologico X. Dimostra che se Y è un sottospazio di X tale che $A \subseteq Y \subseteq \overline{A}$, allora Y è connesso.

7.6) In $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea, considera il sottoinsieme

$$A = \{(0, 1)\} \cup \{(x, 0) \,|0 < x < 1\} \cup \{(1/n, y) \,|\, n \in \mathbf{N}, n \neq 0, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Dimostra che A è connesso ma non connesso per archi.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

7.7) * Considera $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea. Dimostra che:

(i) S^1,

(ii) una coppia di circonferenze disgiunte,

(iii) una coppia di circonferenze tangenti,

(iv) una coppia di circonferenze secanti

non sono sottospazi topologici a due a due omeomorfi.

7.8) Dimostra che, se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse di X sono aperte.

7.9) * Considera su $\mathbf{R}$ la topologia $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ di **Sorgenfrey del limite inferiore** che ha per base gli intervalli della forma $[a, b)$, con $a < b \in \mathbf{R}$. Mostra che un sottoinsieme non vuoto S è connesso se e solo se è composto da un unico punto (i.e. $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ e' **totalmente sconnesso**).

7.10) * Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice **localmente costante** se , per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno J di x tale che $f(x) = f(y)$ per ogni $y \in J$. Mostra che, se X è connesso e $f : X \to \mathbf{R}$ è continua e localmente costante, allora f è costante.