Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 7 Esercizi - SVOLGIMENTI
[1]

7.1) Determina uno spazio topologico X e una famiglia numerabile di compatti di X la cui unione non sia compatta in X.

7.2) * Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia ∞ un elemento che non appartiene a X. Sull'insieme $X^\infty = X \cup \{\infty\}$, considera la famiglia di sottoinsiemi

$$\mathcal{U}^\infty = \mathcal{U} \cup \{A \cup \{\infty\} \,|\, A \subseteq X, X \setminus A \text{ chiuso e compatto in } X\}.$$

Lo spazio topologico $(X^\infty,\mathcal{U}^\infty)$ è detto **compattificazione di Alexandroff di X con un punto** di $(X,\mathcal{U})$. Dimostra che:

i) La famiglia $\mathcal{U}^\infty$ è una topologia su X^∞, rispetto alla quale X^∞ è compatto (**visto a lezione con Prof.ssa Tovena**)

ii) Lo spazio $(X,\mathcal{U})$ è un sottospazio topologico di X^∞.

iii) Utilizzando la proiezione stereografica e considerando la topologia indotta dalla topologia euclidea, dimostra che la sfera $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ è omemorfa alla **compattificazione di Alexandroff con un punto di $\mathbf{R}^2$**.

7.3) Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico. Diciamo che una applicazione $f : X \to \mathbf{R}$ è **superiormente semicontinua** se $f^{-1}(-\infty, a)$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbf{R}$.

Siano $\mathcal{U}_{\text{SSA}} = \mathcal{T}_s$ e $\mathcal{U}_{\text{SDA}} = \mathcal{T}_d$ le topologie su $\mathbf{R}$ degli intervalli aperti illimitati a sinistra (**Semirette sinistre aperte**), risp., a destra (**Semirette destre aperte**).

i) Dimostra che $f : X \to \mathbf{R}$ è superiormente semicontinua se e solo se, per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}$, esiste un intorno U di x in X tale che $f(y) < f(x) + \varepsilon$ per ogni $y \in U$.

ii) Dimostra che $f : X \to \mathbf{R}$ è superiormente semicontinua se e solo se $f : X \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$ è continua.

iii) Mostra che l'applicazione $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ definita da $x \mapsto -x$ è continua.

iv) Mostra che una applicazione $f : X \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ è continua (e in tal caso, la chiamiamo **inferiormente semicontinua**) se e solo se $-f$ è superiormente semicontinua.

7.4) * Considera la topologia euclidea su $\mathbf{R}^2$. Quali dei seguenti sottospazi sono connessi? quali sono connessi per archi? quali sono compatti?

a) $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;

b) $Y_2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, |y| > 0\}$;

c) $Y_3 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, y = 0\}$;

d) $Y_4 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \,|\, |y| > 0\}$.

7.5) * Considera un sottospazio connesso A di uno spazio topologico X. Dimostra che se Y è un sottospazio di X tale che $A \subseteq Y \subseteq \overline{A}$, allora Y è connesso.

7.6) In $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea, considera il sottoinsieme

$$A = \{(0, 1)\} \cup \{(x, 0) \,|0 < x < 1\} \cup \{(1/n, y) \,|\, n \in \mathbf{N}, n \neq 0, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Dimostra che A è connesso ma non connesso per archi.

[1]Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

7.7) * Considera $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea. Dimostra che:

(i) S^1,

(ii) una coppia di circonferenze disgiunte,

(iii) una coppia di circonferenze tangenti,

(iv) una coppia di circonferenze secanti

non sono sottospazi topologici a due a due omeomorfi.

7.8) Dimostra che, se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse di X sono aperte.

7.9) * Considera su $\mathbf{R}$ la topologia $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$ di **Sorgenfrey del limite inferiore** che ha per base gli intervalli della forma $[a, b)$, con $a < b \in \mathbf{R}$. Mostra che un sottoinsieme non vuoto S è connesso se e solo se è composto da un unico punto (i.e. $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}})$ e' **totalmente sconnesso**).

7.10) * Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice **localmente costante** se , per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno J di x tale che $f(x) = f(y)$ per ogni $y \in J$. Mostra che, se X è connesso e $f : X \to \mathbf{R}$ è continua e localmente costante, allora f è costante.

Svolgimenti

7.1) Possiamo prendere $X = \mathbf{R}$ dotato della topologia euclidea. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, consideriamo l'intervallo chiuso e limitato

$$I_n := [-n,\ n],$$

che e' compatto in questa topologia perche' chiuso e limitato.

La famiglia di compatti $\{I_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e' quella cercata, visto che

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n = \mathbf{R}.$$

7.2) (i) Dimostriamo che $\mathcal{U}^\infty$ e' una topologia.

(T1) Ovviamente $\emptyset \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}^\infty$. Inoltre $X^\infty \in \mathcal{U}^\infty$ in quanto $X \setminus X = \emptyset$ c'e e' un chiuso e compatto in X.

Cotinua svolgimento pagine successive

(T2) Sia $\{U_i\}$ una famiglia arbitraria di elementi di $\mathcal{U}^\infty$. Allora $U_i \in \mathcal{U}$ o $U_i \in \mathcal{U}^\infty \setminus \mathcal{U}$. Suddividiamo dunque la famiglia in due sottofamiglie: $I = I_1 \cup I_2$ dove $i \in I_1$ se e solo se $U_i \in \mathcal{U}$. Allora $\bigcup_{i\in I} U_i = \left(\bigcup_{i\in I_1} U_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I_2} U_i\right)$. Poiché $\mathcal{U}$ è una topologia, vale che $\bigcup_{i\in I_1} U_i =: U \in \mathcal{U}$. Inoltre, se $U_i \in \mathcal{U}^\infty \setminus \mathcal{U}$, allora esiste un $A_i \in \mathcal{U}$ tale che $U_i = A_i \cup \{\infty\}$ e $X \setminus A_i$ è compatto, e dunque

$$\bigcup_{i\in I_2} U_i = \bigcup_{i\in I_2} (A_i \cup \{\infty\}) = \left(\bigcup_{i\in I_2} A_i\right) \cup \{\infty\}.$$

Per concludere che (T2) vale dobbiamo dunque mostrare che $X \setminus \left(\bigcup_{i\in I_2} A_i\right)$ è chiuso e compatto. Poiché per $\mathcal{U}$ vale (T2), allora $\bigcup_{i\in I_2} A_i$ è aperto e dunque il suo complementare è chiuso. Ora vogliamo dimostrare che

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I_2} A_i\right) = \bigcap_{i\in I_2} (X \setminus A_i)$$

è compatto. Possiamo assumere che vi sia un $k \in I$ tale che $X \setminus A_k \neq \emptyset$ ed abbiamo dunque

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I_2} A_i\right) \subseteq X \setminus A_k,$$

che permette di dimostrare la tesi, poiché un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto.

(T3) Siano $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{U}^\infty$. Vogliamo far vedere che anche la loro intersezione è in $\mathcal{U}$. Se tutti gli U_i sono in $\mathcal{U}$ la tesi segue da (T3) per $\mathcal{U}$. Se almeno un aperto è in $\mathcal{U}$, allora l'intersezione risulta essere intersezione di aperti di $\mathcal{U}$ e concludiamo come prima. Ci siamo dunque ridotti al caso in cui U_i sono tutti contenuti in $\mathcal{U}^\infty \setminus \mathcal{U}$, ovvero al caso in cui per ogni $i = 1, \dots, r$ esiste un $A_i \in \mathcal{U}$ tale che $U_i = A_i \cup \{\infty\}$. Ma allora

$$U_1 \cap \ldots \cap U_r = (A_1 \cup \{\infty\}) \cap \ldots \cap (A_r \cup \{\infty\}) = (A_1 \cap \ldots \cap A_r) \cup \{\infty\}$$

questo insieme è in $\mathcal{U}$ perché

$$X \setminus (\bigcap_{i}^{r} A_i) = \bigcup_{i=1}^{r} (X \setminus A_i)$$

e unione finita di chiusi, risp. compatti, è chiusa, risp. compatta.

Dobbiamo ora dimostrare che $(X^\infty = X \cup \{\infty\}, \mathcal{U}^\infty)$ è compatto. Sia dunque $\{V_j\}$ un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{j\in J} V_j$. Allora come nel punto precedente posso partizionare $J = J_1 \sqcup J_2$ con $j \in J_1$ se e solo se $V_j \in \mathcal{U}$. Poiché $\infty \in X^\infty$ deve valere $J_2 \neq \emptyset$. Sia dunque $A \cup \{\infty\} \subseteq \bigcup_{j\in J_2} V_j$. Allora $X \setminus A$ è chiuso e compatto. Inoltre

$$X \setminus A \subseteq X = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

e dunque ammette un sottoricoprimento aperto, ovvero esistono $j_1, \dots, j_r \in J$ tali che

$$X \setminus A \subseteq V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_r},$$

da cui segue che

$$X^\infty \subseteq (V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_r},) \cup (A \cup \{\infty\}).$$

ii)Il fatto che $(X, \mathcal{U})$ sia un sottospazio topologico di $(X^\infty, \mathcal{U}^\infty)$ è ovvio, poiché $U \in \mathcal{U}$ se e solo se $U = V \cap X$ con $V \in \mathcal{U}^\infty$.

iii) Dobbiamo mostrare che possiamo identificare $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ con $(\mathbf{R}^2)^\infty$. Sia $N := (0,0,1) \in S^2$, allora la proiezione stereografica

$$S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{R}, \quad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

è un omeomorfismo (dove S^2 ha la topologia $\mathcal{U}_{S^2,eucl}$ indotta dalla topologia euclidea su $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$ è considerato con la topologia euclidea $\mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,eucl}$). Vogliamo allora fare vedere che

$$\mathcal{U}_{S^2,eucl} = \{\sigma^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,eucl}\} \cup \{\sigma^{-1}(A) \cup \{N\} \mid A \subseteq \mathbf{R}^2 \text{ e } \mathbf{R}^2 \setminus A \text{ è chiuso e compatto}\}$$

Poiché σ è un omeomorfismo, un insieme $U \subseteq S^2 \setminus \{N\}$ è aperto se e solo se esiste $V \in \mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,eucl}$ tale che $U = \sigma^{-1}(V)$. Supponiamo ora che $U \subseteq S^2$ contenga N. Allora U è aperto se e solo se $S^2 \setminus U = (S^2 \setminus N) \setminus (U \setminus N)$ è chiuso, ma questo per Heine Borel (poiché tutti i punti di S^2 hanno modulo 1) è equivalente a dire che $(S^2 \setminus N) \setminus (U \setminus N)$ è compatto, ma questo avviene se e solo se la sua immagine omeomorfa in $\mathbf{R}^2$, cioè $\mathbf{R}^2 \setminus \sigma U \setminus N$, è compatta (che implica anche chiusa poiché $\mathbf{R}^2$ è uno spazio metrico). Ciò è equivalente ad $U = \sigma^{-1}(V) \cup \{N\}$ per $V \subseteq \mathbf{R}$ aperto (deve essere $V = \sigma(U \setminus \{N\})$) e tale che $\mathbf{R}^2 \setminus V$ è compatto.

7.3) i) $\Rightarrow$. Sia $f : X \to \mathbf{R}$ superiormente semicontinua. Sia $x \in X$ e sia $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Consideriamo $(-\infty, f(x)+\varepsilon) \subset \mathbf{R}$. Per ipotesi esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ tale che $U = f^{-1}(\infty, f(x)+\varepsilon)$. Facciamo vedere che questo è l'aperto cercato: dato che $\varepsilon > 0$, $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq U$; inoltre per ogni $y \in U$ vale $f(y) \in (-\infty, f(x)+\varepsilon)$, ovvero $f(y) < f(x)+\varepsilon$.

$\Leftarrow$. Dobbiamo far vedere che la preimmagine di $(-\infty, a) \in \mathcal{U}$. Sia dunque $V := f^{-1}(-\infty, a)$. Facciamo vedere che ogni punto ammette un intorno aperto interamente contenuto in V: sia dunque $x \in V$ e $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ tale che $a - f(x) > \epsilon$,allora per ipotesi esiste $U_x \in \mathcal{U}$ tale che $f(y) < f(x) + \varepsilon < a$ per ogni $y \in U_x$ e quindi $f(y) \in (-\infty, a)$, ovvero $U_x \subseteq V$.

ii) $\Rightarrow$ Sia $f : X \to \mathbf{R}$ semicontinua superiormente e sia $U \in \mathcal{T}_s$, vogliamo far vedere che $f^{-1}(U) \in U$. Ma questo segue immediatamente dalla proprietà di semicontinuità superiore, poiché una base di aperti è $(-\infty, a)$ al variare di $a \in \mathbf{R}$ e per ipotesi vale $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{U}$ per ogni $a \in \mathbf{R}$, come si voleva.

$\Leftarrow$. Viceversa, se consideriamo ora $\mathbf{R}$ con la topologia $\mathcal{T}_s$, e se $f : X \to \mathbf{R}$ è continua, allora $(-\infty, a) \in \mathcal{T}_s$ per ogni $a \in \mathbf{R}$ e quindi la sua preimmagine deve essere un elemento di X.

iii) Sia $f : (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ data da $x \mapsto -x$. Allora dobbiamo dimostrare che la preimmagine di ogni elemento della base (a, ∞) è in $\mathcal{T}_s$. Ma questo è ovvio poiché $f^{-1}(a,\infty) = (-\infty, -a) \in \mathcal{T}_s$.
iv) Sia $f : (X, \mathcal{U}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ una funzione. Sia $-f : (X, \mathcal{U}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$. Osserviamo che $f = m \circ (-f)$ e $-f = m \circ f$, con $m : (R, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ data da $m(x) = -x$, come nel punto iii) di questo esercizio. Da ii) sappiamo che $-f$ è continua se e solo se $-f$ è superiormente limitata. D'altronde, sappiamo da iii) che m è continua. La tesi segue ora dal fatto che la composizione di due funzioni continue è nuovamente continua.

7.4)

7.5)

7.3) svolto pagine precedenti

7.4) Ricordiamo che uno spazio topologico è **connesso** se non può essere scritto come unione di due aperti (equivalentemente, due chiusi) disgiunti. Uno spazio topologico X si dice invece **connesso per archi** se per ogni due punti $a, b \in X$ esiste una funzione continua $\gamma : [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$ (dove $[0,1]$ è dotato della topologia euclidea).

a) Facciamo vedere che Y_1 è connesso per archi, da cui segue che è anche connesso. Siano $a, b \in Y_1$. Possiamo scriverli in termini di coordinate polari: esistono $r_a, r_b \in (1, \sqrt{2})0$ e $\theta_a, \theta_b \in [0, 2\pi)$ tali che

$$a = (r_a \cos\theta_a, r_a \sin\theta_a), \quad b = (r_b \cos\theta_b, r_b \sin\theta_b).$$

Definiamo γ come segue (prima cambiamo raggio, poi angolo)

$$\gamma : [0,1] \to Y_1$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} ((2tr_b + (1-2t)r_a)\cos\theta_a, (2tr_b + (1-2t)r_a)\sin\theta_a) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ ((r_b \cos((2-2t)\theta_a + (2t-1)\theta_b), (r_b + \sin((2-2t)\theta_a + (2t-1)\theta_b)) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Per quanto riguarda la compattezza, ricordiamo che se consideriamo $\mathbf{R^n}$ con la topologia euclidea, allora un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Y_1 è limitato, ma chiaramente non chiuso, da cui deduciamo che non è compatto.

b) Notiamo che

$$Y_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$$

che è omeomorfo ad $\mathbf{R}$ (con la topologia euclidea). La retta reale con la topologia euclidea è connessa per archi (presi due punti distinti $a, b \in \mathbf{R}$ si va dall'uno all'altro tramite l'arco $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$) e pertanto lo stesso vale per Y_2. Essendo $\mathbf{R}$ non compatta, anche Y_2 è non compatto.

c) Osserviamo che possiamo scrivere Y_3 come unione disgiunta di due sottospazi aperti

$$Y_3 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \,|\, y = 0\} = \{(x,y) \mid y < 0\} \sqcup \{(x,y) \mid y > 0\}.$$

Concludiamo che Y_3 non è connesso e dunque non è neppure che non è né chiuso, né limitato, non è neppure compatto.

d) Y_4 è connesso per archi, poiché dati due punti qualunque $a, b \in Y_4$ possiamo definire

$$\gamma : [0,1] \to Y_4, \quad t \mapsto \begin{cases} (1-2t)a & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ (2t-1)b & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Ne segue che Y_4 è anche connesso. Y_3 non è compatto perché non è limitato.

7.5) Supponiamo che vi siano $Y_1, Y_2 \subseteq Y$, aperti (nella topologia indotta su Y) tali che $Y = Y_1 \cup Y_2$ e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Notiamo prima di tutto che per $i = 1, 2$, essendo $Y_i \subseteq \overline{A}$, deve valere $\overline{Y_i} \subseteq \overline{A}$ e dunque $\overline{Y_i} \cap \overline{A} = \overline{Y_i}$.

Chiaramente, $A = (Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A)$, con $Y_i \cap A$ $(i = 1, 2)$ aperto nella topologia indotta su A, e vale

$$(Y_1 \cap A) \cap (Y_2 \cap A) = (Y_1 \cap Y_2) \cap A = \emptyset.$$

Ma abbiamo assunto che A fosse connesso e pertanto $A = A \cap Y_1$ o $A = A \cap Y_2$. Senza perdita di generalità supponiamo che $A = A \cap Y_1$, da cui segue che $A \subseteq Y_1$ e quindi $\overline{A} \subseteq \overline{Y_1}$. Ma avevamo $Y_1 \subseteq Y \subseteq \overline{A}$ e pertanto $\overline{Y_1} = \overline{A}$. Abbiamo però supposto che $\overline{Y_1} \cap Y_2 = \emptyset$, da cui $Y_2 = Y_2 \cap \overline{A} = Y_2 \cap \overline{Y_1} = \emptyset$. Ne deduciamo che Y è connesso.

7.6) Notiamo prima di tutto che

$$X := \{(x,0) \mid 0 < x < 1\} = (0,1) \times \{0\},$$

che è prodotto di due insiemi connessi e quindi a sua volta connesso.

Osserviamo inoltre che ogni insieme

$$Y_n := \{(1/n, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

è connesso in quanto prodotto di insiemi connessi. Inoltre, se $n \geq 2$, allora $Y_n \cap X = \{(1/n, 0)\} \neq \emptyset$, pertanto $X \cup \bigcup_{n\geq 2} Y_n$ è connesso.

Notiamo infine che $A \subseteq \overline{X \cup \bigcup_{n\geq 2} Y_n}$ e possiamo allora applicare l'esercizio precedente e concludere che A è connesso.

Mostriamo adesso che non è connesso per archi. Più precisamente, faremo vedere che non possiamo connettere $(0,1)$ a nessun altro punto di A tramite un arco. Sia $\gamma : [0,1] \to A$ una funzione continua con $\gamma(0) = (0,1)$. Facciamo vedere che in questo caso la fibra $\gamma^{-1}((0,1))$ è sia aperta che chiusa. Una volta dimostrato questo dalla connessione di $[0,1]$ segue che $\gamma^{-1}((0,1)) = [0,1]$ e dunque non esistono archi che connettono $(0,1)$ a un punto di $A \setminus \{(0,1)\}$. Che $\gamma^{-1}((0,1))$ sia chiuso segue immediatamente dalla continuità di γ assieme al fatto che i punti nella topologia euclidea sono chiusi. Per mostrare che $\gamma^{-1}((0,1))$ è aperto ci vuole un po' più di lavoro. Sia V un qualunque aperto di A che contiene $(0,1)$ e che non interseca $\{(x,0) \mid 0 < x < 1\}$. Sia ora $x \in \gamma^{-1}((0,1))$. La preimmagine $U := \gamma^{-1}(V)$ contiene x ed è aperta. Pertanto troviamo un intervallo aperto $I \subseteq U$ con $x \in I$. Supponiamo ora che vi sia un $a \in A \setminus \{(0,1)\}$ contenuto in $\gamma(I)$. Allora poiché $a \notin \{(x,0) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0,1)\}$ devono esistere un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ ed un $y \in [0,1]$ tali che $a = (1/n, y)$. Possiamo allora prendere un $m \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ e vediamo che $\gamma(I) = ((-\infty, m) \times \mathbf{R} \cap \gamma(I)) \sqcup ((m, \infty) \times \mathbf{R} \cap \gamma(I))$, ovvero $\gamma(I)$ non connesso. Questo è un assurdo, poiché $\gamma(I)$ è immagine continua di un insieme connesso. Ne deduciamo che tale a non esiste e dunque che $f(I) = \{(0,1)\}$, cioè $I \subseteq \gamma^{-1}(\{(0,1)\})$. Ma il punto $x \in \gamma^{-1}(\{(0,1)\})$ era arbitrario e pertanto ne deduciamo che $\gamma^{-1}(\{(0,1)\})$ è aperto.

7.7) Denotiamo con A una circonferenza, con B una coppia di circonferenze disgiunte, con C una coppia di circonferenze tangenti, e con D una coppia di circonferenze secanti (tutti con topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbf{R}^2$). Vogliamo far vedere che son tutti spazi non omeomorfi tra loro.

Prima di tutto notiamo che A, C e D sono connesse per archi, mentre B non lo è. Ma l'immagine omeomorfa di uno spazio connesso per archi deve essere connessa per archi e pertanto B non può essere omeomorfo a nessuno dei restanti spazi.

Sia $c \in C$ il punto in cui si intersecano le due circonferenze e notiamo che $C \setminus \{c\}$ non è connesso. Se vi fosse un omeomorfismo $f : C \to A$ allora si dovrebbe anche avere un omeomorfismo $\tilde{f}^{-1} : A \setminus \{f^{-1}(c)\} \to C \setminus \{c\}$, che è un assurdo poiché il primo spazio è connesso ed il secondo non lo è.

Per concludere mostriamo che D non può essere omeomorfo ad A, né a C. A tal fine,denotiamo $d_1, d_2 \in D$ i due punti di intersezione delle circonferenze secanti che costituiscono D ed osserviamo che $D \setminus \{d_1, d_2\}$ ha quattro componenti connesse. Se vi fosse un omeomorfismo $f : D \to A$, rispettivamente $g : D \to C$, allora esso indurrebbe un omeomorfismo

$$\tilde{f}^{-1} : A \setminus \{f(d_1), f(d_2)\} \to D \setminus \{d_1, d_2\},$$

rispettivamente

$$\tilde{g}^{-1} : A \setminus \{f(d_1), f(d_2)\} \to D \setminus \{d_1, d_2\}.$$

Questo però è un assurdo perché $A \setminus \{f(d_1), f(d_2)\}$, rispettivamente $C \setminus \{g(d_1), g(d_2)\}$ ha al più due, rispettivamente tre, componenti connesse.

7.8) Ricordiamo prima di tutto che ogni sottoinsieme connesso di X è contenuto in un'unica componente connessa. Per ogni punto $x \in X$ scegliamo un suo intorno connesso U_x (ne esiste almeno uno per ipotesi) e sia V_x un aperto tale che $x \in V_x \subseteq U_x$ (esiste per definizione di intorno). Sia ora C una componente connessa e sia $x \in C$. Allora, per quanto ricordato, $U_x \subseteq C$ e quindi $\bigcup_{x \in C} V_x \subseteq \bigcup_{x \in C} U_x \subseteq C$. D'altronde, $C \subseteq \bigcup_{x \in C} V_x$. Ne deduciamo che $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ e quindi C è aperto.

7.9) ($\Leftarrow$) Notiamo prima di tutto che un punto è sempre connesso, pertanto questa implicazione è ovvia.

($\Rightarrow$) Sia ora $S \subset \mathbf{R}$ un insieme connesso (e non vuoto) e sia $p \in S$. Se $S \setminus \{p\} \neq \emptyset$, allora troviamo $q \in S \setminus \{p\}$. A meno di scambiare il ruolo di p e q possiamo supporre che $p < q$. Consideriamo l'insieme $(-\infty, q)$. Tale insieme è aperto poiché $(-\infty, q) = \bigcup_{x<q}[x, q)$ ed è chiuso poiché $(-\infty, q) = \mathbf{R} \setminus [q, \infty)$ e $[q, \infty) = \bigcup_{y>q}[q, t)$. Allora anche $S \cap (-\infty, q)$ è non vuoto, aperto e chiuso nella topologia indotta ed è un sottoinsieme proprio di S poiché $q \notin (-\infty, q)$. Questo è un assurdo poiché un sottoinsieme proprio di un insieme connesso non può essere aperto e chiuso.

7.10) Sia $t_0 \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathbf{R}$. Notiamo che $f^{-1}(t_0)$ e' chiuso in X: infatti $t_0 \in \mathbf{R}$ e' chiuso, visto che $\mathbf{R}$ con topologia euclidea e' certamente T_1, e f e' continua.

Poiche' f e' localmente costante, allora per ogni $x \in f^{-1}(t_0)$, esiste un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \subseteq f^{-1}(t_0)$. Ma allora ogni punto di $f^{-1}(t_0)$ e' punto interno, i.e. $f^{-1}(t_0)$ e' anche un aperto di X.

Se per assurdo f non fosse costante, allora $f^{-1}(t_0) \subset X$, e definiribbe un sottospazio proprio di X che e' contemporaneamente chiusoe d aperto in X, contraddicendo il fatto che X e' connesso.