Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 6 Esercizi

[1]

6.1) * (i) Mostrare che se $(X, \mathcal{U}_X)$ e' uno spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilita' $\mathcal{N}_2$, allora $(X, \mathcal{U}_X)$ e' separabile.

(ii) Esibire un esempio per cui non valga il viceversa della precedente affermazione.

6.2) * Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico separabile. Supponiamo che X contenga un sottoinsieme S chiuso, non numerabile e discreto (i.e. la topologia indotta su S da $\mathcal{U}_X$ e' la topologia discreta). Dedurre che $(X, \mathcal{U}_X)$ non puo' essere uno spazio topologico normale i.e. non puo' essere T_4.

6.3) * Su $\mathbf{R}$, considera la topologia $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ generata da $(s, t]$, $s < t \in \mathbf{R}$, i.e. gli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Sia X lo spazio topologico prodotto di $(\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ con se stesso e considera il sottoinsieme

$$S := \{(t, -t) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Per $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, denota con $R(a_1, b_1; a_2; b_2)$ il prodotto $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$.

(i) Verifica che $(\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ e' uno spazio topologico separabile e che e' anche normale, i.e. T_4.

(ii) Mostra che $S \subset X$ e' chiuso, non numerabile e tale che $S \cap R(a_1, b; a_2, -b) = \{(b, -b)\}$.

(iii) Mostrare che la topologia indotta da $\mathcal{U}_X$ su S e' la topologia discreta.

(iv) Mostrare che X e' separabile ma non normale, i.e. non e' T_4.

6.4) Mostra che uno spazio topologico $(X, \mathcal{U}_X)$ che e' T_1 e che ha cardinalita' finita e' necessariamente dotato della topologia discreta.

6.5) Considera il sottoinsieme $S = [0, 1)$ dello spazio topologico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Esibisci un ricoprimento aperto di S che non ammette sottoricoprimento finito.

6.6) Sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia di uno spazio topologico X. Mostra che, se ogni ricoprimento di X estratto da $\mathcal{B}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.

6.7) * Sia $\{Y_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X. Diciamo che la famiglia $\{Y_j\}$ ha la **proprietà dell'intersezione finita** se per ogni sottoinsieme finito A di J, l'intersezione $\cap_{\alpha \in A} Y_\alpha$ è non vuota. Mostra che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) X è uno spazio topologico compatto, cioè ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

(ii) ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota, contiene una famiglia finita la cui intersezione è vuota.

(iii) ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

6.8) (**Visto a lezione con Prof.ssa Tovena**) Considera un sottoinsieme compatto S dello spazio topologico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Fissato $p \in \mathbf{R}$, con $p \notin S$, considera l'applicazione $f : \mathbf{R} \setminus \{p\} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x-p}$.

(a) Mostra che f è continua.

(b) Mostra che esiste $k \in \mathbf{R}$ con $k > 0$ e tale che $|x - p| > k$ per ogni $x \in S$.

(c) Concludi che ciò dimostra che S è chiuso.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

6.9) Sia (X, d) uno spazio metrico e sian A, B due sottoinsiemi. Si definisce **distanza** tra A e B il numero

$$d(A, B) = inf\,\{d(a, b)\,|a \in A, b \in B\}.$$

(a) Esibire un esempio in cui A e B sono chiusi disgiunti, ma $d(A, B) = 0$.

(b) Mostrare che, se A e B sono disgiunti con A chiuso e B (chiuso e) compatto, allora si ha $d(A, B) > 0$.

6.10) * Sia $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una catena numerabile discendente di chiusi, compatti, non vuoti di uno spazio topologico X. Dimostra che $\cap_{n \in \mathbf{N}}\{K_n\} \neq \emptyset$.

6.11) * Sia $\mathcal{U}_{SSA}$ la topologia su $\mathbf{R}$ delle **semirette sinistre aperte**.

(i) Dimostra che ogni sottospazio compatto, non vuoto in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{SSA})$ ammette massimo.

(ii) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico compatto. Dimostra che ogni applicazione continua $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{SSA})$ ammette massimo.

6.12) * Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico.

(i) Sia $K \subset X$ un sottospazio compatto e sia $E \subset X$ un sottoinsieme finito. Mostra che $K \cup E$ e' compatto in X

(ii) Esibisci un controesempio che confuti l'implicazione inversa.

(iii) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ di Hausdorff e S e T sottoinsiemi compatti di X. Mostra che l'intersezione $H = S \cap T$ è compatta e di Hausdorff.