Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 6 Esercizi - SVOLGIMENTI
[1]

6.1) * (i) Mostrare che se $(X,\mathcal{U}_X)$ e' uno spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilita' $\mathcal{N}_2$, allora $(X,\mathcal{U}_X)$ e' separabile.

(ii) Esibire un esempio per cui non valga il viceversa della precedente affermazione.

6.2) * Sia $(X,\mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico separabile. Supponiamo che X contenga un sottoinsieme S chiuso, non numerabile e discreto (i.e. la topologia indotta su S da $\mathcal{U}_X$ e' la topologia discreta). Dedurre che $(X,\mathcal{U}_X)$ non puo' essere uno spazio topologico normale i.e. non puo' essere T_4.

6.3) * Su $\mathbf{R}$, considera la topologia $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ generata da $(s,\, t]$, $s < t \in \mathbf{R}$, i.e. gli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Sia X lo spazio topologico prodotto di $(\mathbf{R};\mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ con se stesso e considera il sottoinsieme

$$S := \{(t,-t) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Per $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, denota con $R(a_1, b_1; a_2; b_2)$ il prodotto $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$.

(i) Verifica che $(\mathbf{R};\mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ e' uno spazio topologico separabile e che e' anche normale, i.e. T_4.

(ii) Mostra che $S \subset X$ e' chiuso, non numerabile e tale che $S \cap R(a_1, b; a_2, -b) = \{(b, -b)\}$.

(iii) Mostrare che la topologia indotta da $\mathcal{U}_X$ su S e' la topologia discreta.

(iv) Mostrare che X e' separabile ma non normale, i.e. non e' T_4.

6.4) Mostra che uno spazio topologico $(X,\mathcal{U}_X)$ che e' T_1 e che ha cardinalita' finita e' necessariamente dotato della topologia discreta.

6.5) Considera il sottoinsieme $S = [0, 1)$ dello spazio topologico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Esibisci un ricoprimento aperto di S che non ammette sottoricoprimento finito.

6.6) Sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia di uno spazio topologico X. Mostra che, se ogni ricoprimento di X estratto da $\mathcal{B}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.

6.7) * Sia $\{Y_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X. Diciamo che la famiglia $\{Y_j\}$ ha la **proprietà dell'intersezione finita** se per ogni sottoinsieme finito A di J, l'intersezione $\cap_{\alpha\in A} Y_\alpha$ è non vuota. Mostra che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) X è uno spazio topologico compatto, cioè ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

(ii) ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota, contiene una famiglia finita la cui intersezione è vuota.

(iii) ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

6.8) (**Visto a lezione con Prof.ssa Tovena**) Considera un sottoinsieme compatto S dello spazio topologico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Fissato $p \in \mathbf{R}$, con $p \notin S$, considera l'applicazione $f : \mathbf{R} \setminus \{p\} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x-p}$.

(a) Mostra che f è continua.

(b) Mostra che esiste $k \in \mathbf{R}$ con $k > 0$ e tale che $|x - p| > k$ per ogni $x \in S$.

(c) Concludi che ciò dimostra che S è chiuso.

[1]Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

6.9) Sia (X, d) uno spazio metrico e sian A, B due sottoinsiemi. Si definisce **distanza** tra A e B il numero

$$d(A, B) = inf\,\{d(a, b)\,|a \in A, b \in B\}.$$

(a) Esibire un esempio in cui A e B sono chiusi disgiunti, ma $d(A, B) = 0$.

(b) Mostrare che, se A e B sono disgiunti con A chiuso e B (chiuso e) compatto, allora si ha $d(A, B) > 0$.

6.10) * Sia $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una catena numerabile discendente di chiusi, compatti, non vuoti di uno spazio topologico X. Dimostra che $\cap_{n\in\mathbf{N}}\{K_n\} \neq \emptyset$.

6.11) * Sia $\mathcal{U}_{SSA}$ la topologia su $\mathbf{R}$ delle **semirette sinistre aperte**.

(i) Dimostra che ogni sottospazio compatto, non vuoto in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{SSA})$ ammette massimo.

(ii) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico compatto. Dimostra che ogni applicazione continua $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{SSA})$ ammette massimo.

6.12) * Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico.

(i) Sia $K \subset X$ un sottospazio compatto e sia $E \subset X$ un sottoinsieme finito. Mostra che $K \cup E$ e' compatto in X

(ii) Esibisci un controesempio che confuti l'implicazione inversa.

(iii) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ di Hausdorff e S e T sottoinsiemi compatti di X. Mostra che l'intersezione $H = S \cap T$ è compatta e di Hausdorff.

Svolgimenti

6.1) (i) Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile per X, i.e. $\mathcal{B} : \{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. In ogni B_n andiamo a considerare un punto $x_n \in B_n$ e consideriamo l'insieme

$$D := \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

Per costruzione D e' numerabile.

Si tratta di dimostrare che D e' denso, i.e. che ogni $y \in X \setminus D$ e' di accumulazione per D. Sia U_y un qualsiasi intorno di $y \in X \setminus D$. Poiche' U_y deve contenere un aperto contenente y e poiche' $\mathcal{B}$ e' una base per gli aperti, dovra' esistere un $h \in \mathbf{N}$ tale che $y \in B_h \subset U_y$. Ora B_h contiene sia y che, per costruzione, anche il punto $x_h \in D$. Dunque y e' di accumulazione per D.

(ii) Nella esercitazione precedente (**Esercizio 5.10**) e anche a lezione (**Prof.ssa Tovena**) avete visto che $\mathbf{R}$ dotato della topologia $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$, generata dagli intervalli $(s, t]$, non era $\mathcal{N}_2$. Pero' e' separabile, visto che contiene il sottoinsieme $\mathbf{Q}$ che e' numerabile ed inoltre e' denso in $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$, in quanto ogni punto di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ e' di aderenza per $\mathbf{Q}$.

6.2) Per ipotesi X e' separabile, dunque esiste $D \subset X$ insieme denso e numerabile.

Poiche' $S \subset X$ e' chiuso e discreto (i.e. la topologia indotta su S da quella di X e' la topologia discreta), allora ogni sottoinsieme $K \subseteq S$ e' chiuso in X (visto che e' chiuso in S e S chiuso in X per topologia indotta).

Supponiamo per assurdo che X sia normale, i.e. T_4. Allora, per ogni sottoinsieme $K \subseteq S$, esistono due aperti U_K e $U_{S\setminus K}$ tali che

$$K \subseteq U_K,\; S \setminus K \subseteq U_{S\setminus K},\; U_K \cap U_{S\setminus K} = \emptyset.$$

Poiche' D e' denso, per ogni $\emptyset \neq K \subseteq S$, $D \cap U_K \neq \emptyset$.

Inoltre, se $K_1 \neq K_2 \subseteq S$ non vuoti, sia ha che $U_{K_1} \cap D \neq U_{K_2} \cap D$. Infatti, se $K_1 \setminus K_2 \neq \emptyset$, sia ha che

$$U_{K_1} \cap U_{S \setminus K_1} \cap D = \emptyset, \ \ U_{K_1} \cap U_{S \setminus K_2} \cap D \neq \emptyset$$

in quanto $U_{K_1} \cap U_{S \setminus K_2}$ e' un intorno aperto di $K_1 \setminus K_2$ ed in particolare e' non vuoto; questo verifica che $U_{K_1} \cap D \neq U_{K_2} \cap D$. Se invece $K_2 \setminus K_1 \neq \emptyset$, si ragiona in modo speculare.

Pertanto, si puo' possiamo costruire l'applicazione

$$\mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$$

definita cosi'

- se $\emptyset \neq K \subset S$ allora $K \to U_K \cap D$
- se $K = S$ allora $S \to D$
- se $K = \emptyset$ allora $\emptyset \to \emptyset$

Tale applicazione insiemistica e' dunque iniettiva. Questo fornisce l'assurdo, visto che S non era numerabile mentre D lo era.

6.3) (i) Nell' Esercizio 6.1 (ii) abbiamo verificato che $(\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}})$ e' separabile.

Lo spazio $(\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}})$ e' sicuramente T_1, perche' $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$ e' piu' fine della topologia euclidea che era gia' T_1.

Consideriamo ora due chiusi disgiunti C e D di $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$. Per ogni $c \in C$, consideriamo l'intersezione $D \cap (-\infty, \ c)$ e definiamo

$$d_c := \begin{cases} sup\,(D \cap (-\infty, \ c)) & \text{se} \quad D \cap (-\infty, \ c) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases} ;$$

risulta $d_c \neq c$ e $(d_c, c] \cap D = \emptyset$.

Analogamente, per ogni $d \in D$, definiamo

$$c_d = \begin{cases} sup\,(C \cap (-\infty, \ d)) & \text{se} \quad C \cap (-\infty, \ d) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risulta $c_d \neq d$ e $(c_d, d] \cap C = \emptyset$.

Posti

$$U := \bigcup_{c \in C} (d_c, c] \quad \text{e} \quad V := \bigcup_{d \in D} (c_d, d],$$

i sottoinsiemi U e V sono aperti in $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$ con $C \subseteq U$ e $D \subseteq V$.

Basta mostrare che $U \cap V = \emptyset$. Se cosi' non fosse, esisterebbero $c_0 \in C$ e $d_0 \in D$ tali che

$$(d_{c_0}, c_0] \cap (c_{d_0}; d_0] \neq \emptyset.$$

Si puo' supporre $c_0 < d_0$ (i due punti sono necessariamente distinti). Ma, allora, $c_{d_0} < c_0 < d_0$, che e' assurdo.

Dunque $(\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}})$ e' T_4.

(ii) Il sottospazio S e' chiuso in X perche' X ha una topologia piu' fine di $\mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}$ e S e' gia' chiuso rispetto alla topologia euclidea (essendo l'antiimmagine del chiuso $\{0\}$ rispetto all'applicazione continua

$$f : (\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}), \ \ (x_1, x_2) \to x_1 + x_2.$$

Il sottospazio S non e' numerabile, perche' esso e' in biezione con l'insieme dei numeri reali.

Infine, verificare che $S \cap R(a_1, b; a_2, -b) = \{(b, -b)\}$ e' banale.

(iii) Per verificare che la topologia indotta su S da quella di X e' la topologia discreta, basta osservare che, per ogni $b \in \mathbf{R}$, il sottoinsieme $R(a_1, b; a_2, -b)$ e' aperto in X e usare la parte finale del punto (ii).

(iv) Per dimostrare che X e' separabile, consideriamo dapprima il sottoinsieme $\mathbf{Q} \subset (\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$. Esso e' denso e quindi per ogni ogni $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, esistono $q_1 \in (a_1, b_1] \cap \mathbf{Q}$ e $q_2 \in (a_2, b_2] \cap \mathbf{Q}$.

Dunque, $(q_1, q_2) \in R(a_1, b_1; a_2, b_2) \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$ e $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ interseca propriamente tutti gli aperti di una pre-base per la topologia di X. Possiamo quindi concludere che $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ e' denso in X. La numerabilita' di $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ segue dalla numerabilita' di $\mathbf{Q}$.

Poiche' X contiene un sottoinsieme denso e numerabile, ne segue che X e' separabile.

Ora pero', dai punti precedenti, X contiene il sottoinsieme S che e' chiuso, non numerabile e discreto.

Per l'esercizio precedente, ne consegue che X non puo' essere T_4.

6.4) Per ipotesi $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Poiche' X e' T_1, allora ogni punto e' chiuso e dunque ogni unione finita di punti e' un chiuso di X. Allora, per ogni $1 \leq i \leq n$, $X \setminus \{x_i\}$ e' chiuso e dunque $\{x_i\}$ e' aperto, per ogni $1 \leq i \leq n$. Pertanto la topologia e' quella discreta.

6.5) Un possibile ricoprimento con questa proprietà è $U_n := [0, 1 - \frac{1}{n})$.

6.6) Supponiamo $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ sia un ricoprimento aperto di X, Allora per ogni U_i esistono elementi $B_j^{(i)} \in \mathcal{B}$ tali che $U_i = \bigcup_{j \in J} B_j^{(i)}$ e $X = \bigcup_i \bigcup_j B_j^{(i)}$. Ma adesso possiamo usare l'ipotesi e trovare un sottoricoprimento finito $X = B_1 \cup \ldots \cup B_m$. Per ogni B_k esiste un U_{i_k} tale che $B_k \subseteq U_{i_k}$ e pertanto $X = \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ è un sottoricoprimento finito di quello di partenza.

6.7) Ricordiamo che $x \in \cup_{j \in J}(X \setminus Y_j)$ se e solo se esiste un j tale che $x \in X \setminus Y_j$ che è equivalente a $x \notin \bigcap Y_j$. Procediamo con le domande.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sia $\{A_j\}_{j \in J}$ una famiglia di chiusi tali che $\bigcap A_j = \emptyset$. Allora per ogni $j \in J$ esiste un aperto U_j tale che $A_j = X \setminus U_j$ e quindi abbiamo $\emptyset = \bigcap_{j \in J}(X \setminus U_j)$. Per il punto precedente otteniamo

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus \bigcap_{j \in J}(X \setminus U_j) = \bigcup_{j \in J}(X \setminus (X \setminus U_j)) = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Poiché per ipotesi X è compatto, troviamo $j_1, \ldots, j_r \in J$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^r U_{j_i}$ e quindi $\emptyset = X \setminus \bigcup_{i=1}^r U_{j_i}$. Ma $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^r U_{j_i}$ se e solo se e $x \notin U_{j_i}$ per ogni $i = 1, \ldots, r$, ovvero $x \in \bigcap_{i=1}^r (X \setminus U_{j_i})$. Concludiamo che

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^r (X \setminus U_{j_i}) = \bigcap A_{j_i}.$$

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Questa implicazione è ovvia poiché se $\{Y_j\}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita, allora per ogni sottoinsieme finito A di J, l'intersezione $\cap_{\alpha \in A} Y_\alpha$ è non vuota. Se $\emptyset = \bigcap_{j \in J} Y_j$, allora per ii) dovremmo trovare un sottoinsieme finito la cui intersezione è vuota, contraddicendo la proprietà dell'intersezione finita.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Supponiamo che valga iii) e che per assurdo X non sia compatto. Sia dunque $\{U_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti tali che $X = \bigcup U_j$ e consideriamo la famiglia di chiusi $\{A_j := X \setminus U_j\}$. Se X non compatto, allora per ogni sottoinsieme finito $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq J$ vale

$$\emptyset \neq X \setminus \bigcup_{i=1}^r U_{j_i} = \bigcap_{i=1}^r (X \setminus U_{j_i}) = \bigcap A_{j_i},$$

ma per iii) deve valere che anche $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$, da cui $X \neq X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J}(X \setminus A_j) = \bigcup_{j \in J} U_j$. Assurdo.

6.8) a) Questo punto segue immediatamente da una precedente esercitazione ed anche da una lezione della Prof.ssa Tovena, in cui si era dimostrato che se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione continua tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, allora $1/f : X \to \mathbf{R}$, $x \to 1/f(x)$ è continua. Infatti $f(x) = x - p$ ha la proprietà che non si annulla mai su $\mathbf{R} \setminus \{p\}$.

b)Poiché f è continua ed S è compatto, allora $f(S)$ è compatto a sua volta. Vediamo ora che $f(S)$ è limitato, ovvero che esiste un $M > 0$ tale che $|y| < M$ per ogni $y \in f(S)$. Basta notare che $0 \notin f(S)$ (quindi $y \in B_{|y|}(y)$ per ogni $y \in f(S)$) e considerare il ricoprimento aperto

$$f(S) = \bigcup_{y \in Y} (B_{|y|}(y) \cap f(S)) \subseteq \bigcup_{y \in Y} B_{|y|}(y).$$

Allora essendo $f(S)$ compatto, esistono $y_1, \ldots, y_r$ tali che

$$f(S) = \bigcup_{i=1}^{r} (B_{|y_i|}(y_i) \cap f(S)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B_{|y_i|}(y_i).$$

Notiamo ora che se $z \in B_{|y_i|}(y_i) \cap f(S)$, allora $|z| \leq |z - y_i| + |y_i|$, cioè $|z| < 2|y_i|$ e pertanto basta porre $M := 2\max_i\{|y_i|\}$.

Abbiamo dunque dimostrato che esiste un $M > 0$ tale che $|y| < M$ per ogni $y \in f(S)$. Ne segue che $1/|x-p| < M$ per ogni $x \in S$ e quindi possiamo porre $k := 1/M$ ed ottenere $|x-p| > 1/M = k$ per ogni $x \in S$.

c)Per vedere che S è chiuso mostriamo che il suo complementare è aperto. Sia dunque $p \in \mathbf{R} \setminus S$ (cioè, $p \notin S$). Vogliamo far vedere che esiste un aperto $U \subseteq \mathbf{R} \setminus S$ (cioè tale che $U \cap S = \emptyset$) con $p \in U$. Ma questo ora segue immediatamente dal punto precedente: se $k_p > 0$ è tale che $|x - p| > k_p$ per ogni $s \in S$, allora possiamo prendere $U = (p - k_p, p + k_p)$ e chiaramente $p \in U$ e $U \cap S = \emptyset$ come si voleva.

6.9) a) Consideriamo $X = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ e $B = \left\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$. Allora A e B sono chiusi e $A \cap B = \emptyset$. Inoltre,

$$d(A,B) = inf\{|a - b| \ \mid a \in A,\ b \in B\} = inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\} = 0.$$

b) Poiché A e B sono disgiunti, per ogni $b \in B$ esiste un $\delta_b > 0$ tale che $d(a,b) > \delta_b$ per ogni $a \in A$. Possiamo allora considerare il ricoprimento aperto di B:

$$B = \bigcup_{b \in B} (B_{\frac{\delta_b}{2}}(b) \cap B) \subseteq \bigcup_{b \in B} B_{\frac{\delta_b}{2}}(b).$$

Tale ricoprimento ha la proprietà che per ogni $b \in B$ vale il seguente fatto: per ogni $x \in B_{\delta_b/2}(b) \cap B$ e per ogni $a \in A$ abbiamo

$$d(x,a) \geq d(a,b) - d(x,b) \geq \frac{\delta_b}{2}.$$

Ci ricordiamo ora che B è compatto, e quindi esiste un sottoricoprimento finito, ovvero esistono $b_1, \ldots, b_R$ tali che

$$B = \bigcup_{i=1}^{r} (B_{\frac{\delta_{b_i}}{2}}(b) \cap B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B_{\frac{\delta_{b_i}}{2}}(b)$$

e quindi $\inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\} = min_r\left\{\frac{\delta_{b_i}}{2}\right\} > 0$.

6.10) $Y := K_1$ e' compatto e chiuso in X. La famiglia $\{Y_n := K_n\}_{n\geq 2}$ e' una famiglia di chiusi e compatti di X contenuti nel sottospazio Y e dunque, per topologia indotta, sono anche chiusi di Y. Essendo Y compatto, sono anche compatti di Y. Tale famiglia ha la proprieta' delle intersezioni finite dell'Esercizio 6.8 precedente. Poiche $Y = K_1$ e' compatto, allora si ha $\bigcap_{n\geq 2} K_n \neq \emptyset$ e dunque $\bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset$.

6.11) (i) Sia $K \subset (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{SSA}})$ un qualsiasi compatto. Poniamo $e := \text{Sup}(K)$. Ragioniamo per assurdo.

- Se $e \notin K$ ma $e \in \mathbf{R}$ allora avremmo

$$K \subseteq (-\infty, e) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left(-\infty,\ e - \frac{1}{n}\right)$$

e dal precedente ricoprimento aperto non potremmo estrarre un sotto-ricoprimento aperto finito, contraddicendo la compattezza di K.

- Se invece $e = +\infty$, allora

$$K \subseteq (-\infty, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (-\infty, n)$$

e dal precedente ricoprimento aperto di nuovo non potremmo estrarre un sotto-ricoprimento aperto finito, contraddicendo la compattezza di K.

Pertanto $e \in K$.

(ii) Poiche' f e' continua e X e' compatto , $f(X) \subset (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{SSA}})$ e' compatto. Si conclude utilizzando il punto (i).

6.12) (i) Sia $\mathcal{A}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di $K \cup E$. Poiche'

$$K \subset K \cup E \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A,$$

si ha che $\mathcal{A}$ e' anche un ricoprimento aperto di K. Poiche' K e' compatto, esiste un numero finito di aperti di $\mathcal{A}$, siano essi $A_1, \ldots, A_n$, tali che

$$K \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Ora, posto

$$E := \{x_1, \ldots, x_m\}$$

sia A_{j_i} un qualsiasi aperto di $\mathcal{A}$ tale che

$$x_i \in A_{j_i}, \ \ 1 \leq i \leq m.$$

Pertanto

$$K \cup E \subseteq \left(\bigcup_{t=1}^{n} A_t\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_{j_i}\right)$$

che dimostra la compattezza di $K \cup E$

(ii) E' sufficiente prendere $X = (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$, con $K \cup E = [0, 1]$ che e' compatto, perche' chiuso e limitato. Ma se $E = \{0\}$ dunque $K = (0, 1]$, abbiamo che K non e' compatto perche' non e' chiuso nella topologia euclidea.

(iii) Studiamo la compattezza di H: per ipotesi $(X, \mathcal{U}_X)$ e' uno spazio T_2 e S e T sono sottoinsiemi compatti di X. Visto che ogni compatto di un T_2 e' chiuso, si ha che S e T sono chiusi di X. Visto che $H = S \cap T$, esso e' chiuso in X perche' intersezione di due chiusi di X. Ma $H \subset S$ e dunque, per topologia indotta, e' un chiuso di S che e' compatto. Dunque H e' compatto in S ed e' dunque anche compatto in X.

Verifichiamo che H e' T_2. Poiche' X e' T_2, S e T essendo sottospazi, sono anch'essi T_2. Ma allora $H = S \cap T \subset S$ e' sottospazio di S che e' T_2 e quindi e' T_2.