Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 5 Esercizi

[1]

5.1) * Considera l'intervallo reale $X = [-1, 1]$ e la famiglia

$$\mathcal{B} := \{[-1, s);\ (t, s);\ (t, 1],\ |t, s \in \mathbf{R}\ t.c. -1 \leq t < 0;\ 0 < s \leq 1\}.$$

(a) Dimostra che $\mathcal{B}$ e' una base per una topologia su X.

(b) Denotata con $\mathcal{T}$ la topologia su X generata da $\mathcal{B}$, stabilisci se lo spazio $(X, \mathcal{T})$ risulta metrizzabile.

5.2) * Considera $(X, \mathcal{T})$ come nell'esercizio precedente. Denota invece con $\mathcal{U}$ la topologia indotta sul sottospazio X dalla topologia euclidea su $\mathbf{R}$. Considera le due applicazioni:

$$f : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{T}),\quad x \xrightarrow{f} x$$

e

$$g : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{U}),\quad x \xrightarrow{g} x^2.$$

(a) Discuti se l'applicazione f e' continua e se e' un omeomorfismo.

(b) Discuti se l'applicazione g e' continua, se e' chiusa, se e' aperta.

5.3) * In $\mathbf{R}$ considera la topologia $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$, che ha come base gli intervalli $(t, s]$ (topologia generata dagli **intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra** o **topologia del limite superiore**). Per ogni $a < b \in \mathbf{R}$, determina

(i) chiusura, interno, frontiera, derivato e punti isolati di $[a, b)$

(ii) chiusura, interno, frontiera, derivato e punti isolati di $(a, b]$.

(iii) Stabilire quale tra i due insiemi $[a, b)$ e $(a, b]$ e' perfetto

5.4) Siano dati su $\mathbf{R}$ l'elemento $\sqrt{5}$ e le quattro topologie $\mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}$, $\mathcal{U}_{\mathrm{Cof}}$, $\mathcal{U}_{\mathrm{SDA}}$ e $\mathcal{U}_{\mathrm{Sorg}}$, rispettivamente euclidea, cofinita, delle semirette destre aperte e di Sorgenfrey del limite superiore, i.e. che ha per base gli intervalli $(t, s]$.

Determinare un intorno aperto ed un intorno chiuso di $\sqrt{5}$ nelle quattro topologie.

5.5) * Nello spazio topologico $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}})$ si considerino i sottoinsiemi

$$\mathbf{Z},\quad \mathbf{Q},\quad T := (0, 1]\ \text{ e }\ S := \left\{(-1)^n(1 + \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Determinare il derivato e l'insieme dei punti isolati dei precedenti sottoinsiemi.

5.6) * Si consideri $X = (\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\mathrm{Cof}})$.

(i) Mostrare che X e' T_1 ma non e' T_2.

(ii) Verificare che in effetti $\Delta_X \subset X \times X$ non e' chiusa.

(iii) Esibire due funzioni continue $f, g : X \to X$ che coincidono su un sottoinsieme A denso in X ma non coincidono su tutto X.

(iv) Data la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$ determinare l'insieme limite della successione.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

5.7) * Considera lo spazio topologico $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{\mathrm{SSA}})$, dove $\mathcal{U}_{\mathrm{SSA}}$ **topologia delle semirette sinistre aperte**.

(a) Dimostra che lo spazio topologico soddisfa $\mathcal{N}_1$ (primo assioma di numerabilita') esibendo, per ogni $x \in \mathbf{R}$, un sistema fondamentale numerabile di intorni aperti

(b) Dimostra che lo spazio topologico soddisfa $\mathcal{N}_2$ (secondo assioma di numerabilita')

5.8) * Sia dato uno spazio topologico $(X,\mathcal{U}_X)$ per cui valga la seguente proprieta':

(*) per ogni $x \neq y \in X$ esistono $U_x, U_y \in \mathcal{U}_X$ per cui $x \in U_x$, $y \in U_y$ ma $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$.

Per ogni $x \in X$, sia inoltre $\mathcal{B}(x)$ un **sistema fondamentale di intorni** di x.

(i) Dimostra che, per ogni $x \in X$ si ha $\{x\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}(x)} B$.

(ii) Dimostra che $(X,\mathcal{U}_X)$ gode della proprieta' (*) come sopra se e solo se i punti sono chiusi in X, i.e. se e solo se X e' uno spazio topologico T_1.

5.9) * Sia dato uno spazio topologico $(X,\mathcal{U}_X)$ che goda della proprieta' (*) come sopra. Dimostra che se un sottoinsieme $S \subseteq X$ e' tale che $D(S) \neq \emptyset$ allora S e' necessariamente infinito.

5.10) Sia $X = \mathbf{R}$ la retta reale e sia $\mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}}$ la topologia euclidea su X. Determina topologie $\mathcal{U}'$ e $\mathcal{U}''$ non $\mathcal{N}_2$ su X, tali che $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}} \subseteq \mathcal{U}''$.