Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 5 Esercizi - SVOLGIMENTI

[1]

5.1) * Considera l'intervallo reale $X = [-1, 1]$ e la famiglia

$$\mathcal{B} := \{[-1, s);\ (t, s);\ (t, 1],\ | t, s \in \mathbf{R}\ t.c. -1 \leq t < 0;\ 0 < s \leq 1\}.$$

(a) Dimostra che $\mathcal{B}$ e' una base per una topologia su X.

(b) Denotata con $\mathcal{T}$ la topologia su X generata da $\mathcal{B}$, stabilisci se lo spazio $(X, \mathcal{T})$ risulta metrizzabile.

5.2) * Considera $(X, \mathcal{T})$ come nell'esercizio precedente. Denota invece con $\mathcal{U}$ la topologia indotta sul sottospazio X dalla topologia euclidea su $\mathbf{R}$. Considera le due applicazioni:

$$f : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{T}),\ \ x \xrightarrow{f} x$$

e

$$g : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{U}),\ \ x \xrightarrow{g} x^2.$$

(a) Discuti se l'applicazione f e' continua e se e' un omeomorfismo.

(b) Discuti se l'applicazione g e' continua, se e' chiusa, se e' aperta.

5.3) * In $\mathbf{R}$ considera la topologia $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$, che ha come base gli intervalli $(t, s]$ (topologia generata dagli **intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra** o **topologia del limite superiore**). Per ogni $a < b \in \mathbf{R}$, determina

(i) chiusura, interno, frontiera, derivato e punti isolati di $[a, b)$

(ii) chiusura, interno, frontiera, derivato e punti isolati di $(a, b]$.

(iii) Stabilire quale tra i due insiemi $[a, b)$ e $(a, b]$ e' perfetto

5.4) Siano dati su $\mathbf{R}$ l'elemento $\sqrt{5}$ e le quattro topologie $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$, $\mathcal{U}_{\text{Cof}}$, $\mathcal{U}_{\text{SDA}}$ e $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$, rispettivamente euclidea, cofinita, delle semirette destre aperte e di Sorgenfrey del limite superiore, i.e. che ha per base gli intervalli $(t, s]$.

Determinare un intorno aperto ed un intorno chiuso di $\sqrt{5}$ nelle quattro topologie.

5.5) * Nello spazio topologico $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$ si considerino i sottoinsiemi

$$\mathbf{Z},\ \ \mathbf{Q},\ \ \ T := (0, 1]\ \text{ e }\ S := \left\{(-1)^n(1 + \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Determinare il derivato e l'insieme dei punti isolati dei precedenti sottoinsiemi.

5.6) * Si consideri $X = (\mathbf{R}; \mathcal{U}_{\text{Cof}})$.

(i) Mostrare che X e' T_1 ma non e' T_2.

(ii) Verificare che in effetti $\Delta_X \subset X \times X$ non e' chiusa.

(iii) Esibire due funzioni continue $f, g : X \to X$ che coincidono su un sottoinsieme A denso in X ma non coincidono su tutto X.

(iv) Data la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$ determinare l'insieme limite della successione.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

5.7) * Considera lo spazio topologico $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{SSA}})$, dove $\mathcal{U}_{\text{SSA}}$ **topologia delle semirette sinistre aperte**.

(a) Dimostra che lo spazio topologico soddisfa $\mathcal{N}_1$ (primo assioma di numerabilita') esibendo, per ogni $x \in \mathbf{R}$, un sistema fondamentale numerabile di intorni aperti

(b) Dimostra che lo spazio topologico soddisfa $\mathcal{N}_2$ (secondo assioma di numerabilita')

5.8) * Sia dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{U}_X)$ per cui valga la seguente proprieta':

(*) per ogni $x \neq y \in X$ esistono $U_x, U_y \in \mathcal{U}_X$ per cui $x \in U_x$, $y \in U_y$ ma $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$.

Per ogni $x \in X$, sia inoltre $\mathcal{B}(x)$ un **sistema fondamentale di intorni** di x.

(i) Dimostra che, per ogni $x \in X$ si ha $\{x\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}(x)} B$.

(ii) Dimostra che $(X, \mathcal{U}_X)$ gode della proprieta' (*) come sopra se e solo se i punti sono chiusi in X, i.e. se e solo se X e' uno spazio topologico T_1.

5.9) * Sia dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{U}_X)$ che goda della proprieta' (*) come sopra. Dimostra che se un sottoinsieme $S \subseteq X$ e' tale che $D(S) \neq \emptyset$ allora S e' necessariamente infinito.

5.10) Sia $X = \mathbf{R}$ la retta reale e sia $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ la topologia euclidea su X. Determina topologie $\mathcal{U}'$ e $\mathcal{U}''$ non $\mathcal{N}_2$ su X, tali che $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}_{\text{Eucl}} \subseteq \mathcal{U}''$.

Svolgimenti

5.1) (a) Per verificare che $\mathcal{B}$ e' una base, e' sufficiente mostrare che:

(i) ogni punto di X appartiene ad almeno un elemento di $\mathcal{B}$ (i.e. $\mathcal{B}$ e' un ricoprimento);

(ii) se $U, V \in \mathcal{B}$ sono tali che $U \cap V \neq \emptyset$, per ogni $x \in U \cap V$ esiste $W \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in W \subseteq U \cap V$.

Mostriamo che vale la proprieta' (i). Sia $x \in X$. Se $x \leq 0$, allora $x \in [-1, 1/2) \in \mathcal{B}$; se, invece, $x > 0$, allora $x \in (-1/2; 1] \in \mathcal{B}$. Dunque $\mathcal{B}$ soddisfa la proprieta' (i).

Mostriamo che vale la proprieta' (ii). Siano $U, V \in \mathcal{B}$ tali che $U \cap V \neq \emptyset$. Le sottofamiglie di $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}_{-1} := \{[-1, s) \mid s \in X,\ 0 < s \leq 1\},$$

$$\mathcal{B}_1 := \{(t, 1] \mid t \in X,\ -1 \leq t < 0\}$$

e

$$\mathcal{B}_0 := \{(t, s) \mid t, s \in X,\ -1 \leq t < 0,\ 0 < s \leq 1\}$$

sono chiuse per l'intersezione. E' quindi sufficiente studiare i casi in cui U e V appartengono a due sottofamiglie differenti. L'intersezione tra un elemento di $\mathcal{B}_0$ con un elemento di un'altra sottofamiglia e' sempre un elemento di $\mathcal{B}_0$. Anche l'intersezione non vuota di un elemento di $\mathcal{B}_{-1}$ con un elemento di $\mathcal{B}_1$ e' sempre un elemento di $\mathcal{B}_0$.

In definitiva $\mathcal{B}$ e' una base per una topologia.

(b) Se lo spazio $(X, \mathcal{T})$ fosse metrizzabile, allora sarebbe di Hausdorff (equiv. T_2). Mostriamo che $(X, \mathcal{T})$ non e' nemmeno T_1. Prendiamo $x \neq 0 \in X$; se lo spazio fosse T_1, dovrebbero esistere un intorno N_x di x ed un intorno N_0 di 0 tali che $x \notin N_0$ e $0 \notin N_x$.

Per definizione di intorno, N_x e' un sottoinsieme di X che contiene un aperto $A_x \in \mathcal{T}$ tale che $x \in A_x \subseteq N_x$. Ma la topologia $\mathcal{T}$ ha come base $\mathcal{B}$, pertanto l'aperto A_x e' ricoperto da elementi di $\mathcal{B}$ e dunque per ogni siffato A_x deve esistere $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq A_x$

Notando che gli elementi di $\mathcal{B}$ contengono tutti 0, allora ogni intorno N_x di x contiene 0, i.e. $(X, \mathcal{T})$ non e' T_1.

5.2) (a) Poiche' $f = Id_X$, verificare che f e' continua e' equivalente a verificare che gli aperti di $\mathcal{T}$ sono anche aperti di $\mathcal{U}$. E' sufficiente verificare questo fatto sugli aperti della base $\mathcal{B}$, per definizione di base.

Se $-1 \leq t < 0$ e $0 < s \leq 1$, allora gli elementi di $\mathcal{B}$ sono anche aperti di $\mathcal{U}$. Infatti, per definizione di topologia indotta, si ha ad esempio:

$$(t, 1] = X \cap (t, 2) \in \mathcal{U}, \;\; [-1, s) = X \cap (-2; s) \in \mathcal{U}, \;\; (t, s) = (t, s) \in \mathcal{U}.$$

Poiche' $\mathcal{U}$ contiene una base di $\mathcal{T}$, si ha che $\mathcal{T}$ e' meno fine di $\mathcal{U}$. Inoltre essa e' strettamente meno fine di $\mathcal{U}$ infatti la prima non e' nemmeno T_1 (come dimostrato nel primo esercizio) mentre $\mathcal{U}$, indotta dalla euclidea e' ovviamente T_2.

L'antiimmagine di ogni aperto di $(X; \mathcal{T})$ tramite f e' un aperto di $\mathcal{U}$ e dunque l'applicazione f e' continua.

Ovviamente l'applicazione f e' banalmente biettiva. Eppure non e' un omeomorfismo perche' f non e' aperta: infatti, $(1/3, 2/3)$ e' aperto in $\mathcal{U}$, ma non in $\mathcal{T}$ perche' non contiene 0 (tutti gli aperti di $\mathcal{T}$ devono contenere 0 per quanto dimostrato nel primo esercizio).

(b) Notiamo che $Im(g) = [0, 1] \subset X$.

L'applicazione g non e' continua. Infatti, preso l'aperto $U = (1/3; 2/3)$ di $\mathcal{U}$ che e' tutto contenuto in $Im(g)$, abbiamo che

$$g^{-1}(U) = (-1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$$

che non e' aperto in $\mathcal{T}$ perche' con contiene 0.

L'applicazione g e' chiusa. I chiusi di $\mathcal{T}$ sono dati da i complementari degli elementi di $\mathcal{B}$, dalle loro unioni finite e dalle loro intersezioni arbitrarie, con $-1 \leq t < 0$ e $0 < s \leq 1$. Notiamo che

$$g([s,\ 1]) = [s^2,\ 1], \quad g([-1\ \ t]) = [t^2\ \ 1]$$

sono tutti chiusi di $\mathcal{U}$.

L'applicazione g non e' aperta, perche'

$$g([-1,\ \ 1]) = [0,\ \ 1]$$

non e' aperto in $\mathcal{U}$.

5.3) (i) Notiamo subito che $[a, b)$ non è chiuso. Infatti, verifichiamo che il suo complementare $Y := \mathbf{R} \setminus [a, b)$ non e' aperto: infatti $b \in Y$ ma non esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che $(t, b] \subseteq Y$. Quindi $[a, b)$ non è chiuso. Ovviamente si ha $[a, b) \subset [a, b]$. Mostriamo che $[a, b]$ e' chiuso in $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$. Il suo complementare e' $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Osserviamo ora che gli insiemi $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ sono aperti: per ogni $s \in (-\infty, a)$, risp. $s \in (b, \infty)$, vale $(s - 1, s] \subset (-\infty, a)$, risp. $(b, s] \subset (b, \infty)$. Pertanto $\mathbf{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ è aperto e dunque $[a, b]$ chiuso. Ma allora

$$[a, b) \subset \overline{[a, b)} \subseteq [a, b],$$

da cui deduciamo che $[a, b] = \overline{[a, b)}$.

Per quanto riguarda l'interno di $[a, b)$, osserviamo che $[a, b)$ non è aperto: non esiste un $t \in \mathbf{R}$ tale che $(t, a] \subset [a, b)$. Si ha $(a, b) \subset [a, b)$. Osserviamo che (a, b) è aperto poiché per ogni $s \in (a, b)$ vale $(a, s] \subset (a, b)$. Quindi

$$(a, b) \subseteq \overset{o}{[a, b)} \subset [a, b)$$

da cui $\overset{o}{[a, b)} = (a, b)$.

Da quanto detto prima deduciamo che $\partial([a,b)) = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$.

Notiamo che $\{a\}$ e' punto isolato di $[a,b)$ in quanto, per ogni $\epsilon > 0$, $(a-\epsilon, a]$ e' un intorno aperto di a che ha in comune con $[a,b)$ solo il punto a. Con ragionamenti analoghi, si verifica agilmente che $D([a,b)) = (a,b]$ e dunque $[a,b)^* = I([a,b)) = \{a\}$.

(ii) Per quanto riguarda $(a,b]$, abbiamo **visto a lezione (Prof. Flamini)** che esso e' sia aperto che chiuso in $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$. Ma allora la sua frontiera e' vuota.

Poiche' per ogni sottoinsieme S di uno spazio topologico si ha

$$\overline{S} = S \cup D(S) = D(S) \,\dot{\cup}\, S^*$$

($\dot{\cup}$ = **unione disgiunta**), dove S^* l'insieme dei punti isolati di S, nel nostro caso $S = (a,b]$ era gia' chiuso, pertanto dalla prima eguaglianza si ottiene $D((a,b]) = (a,b]$ mentre dalla seconda $(a,b]^* = I((a,b]) = \emptyset$, (ricordiamo che $D(S)$ e S^* sono sempre disgiunti per definizione).

(iii) Dai punti precedenti, poiche' $[a,b)$ non era chiuso, non poteva essere perfetto, inoltre ammette anche un punto isolato. Solo il sottoinsieme $(a,b]$ e' un insieme perfetto.

5.4) In $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$, ad esempio, abbiamo rispettivamente $(\sqrt{5}-\epsilon, \sqrt{5}+\epsilon)$ e $[\sqrt{5}-\epsilon, \sqrt{5}+\epsilon]$, per $\epsilon > 0$.

In $\mathcal{U}_{\text{Cof}}$ un intorno aperto e' del tipo $\mathbf{R} \setminus K$, ove K insieme finito tale che $\sqrt{5} \notin K$ L'unico intorno chiuso e' $\mathbf{R}$ visto, che per definizione di intorno, esso deve contenere un aperto che contenga $\sqrt{5}$.

In $\mathcal{U}_{\text{SDA}}$, un intorno aperto e' del tipo $(a, +\infty)$ con $a < \sqrt{5}$. Come sopra, l'unico intorno chiuso e' $\mathbf{R}$.

In $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ un intorno sia aperto che chiuso e' ad esempio $(s, \sqrt{5}]$.

5.5) • Consideriamo $\mathbf{Z}$ e prendiamo $x \in \mathbf{R}$.

Se x non e' intero, esistera' un intero k per cui $k < x < k+1$. Prendendo $0 < \epsilon := min\{x - k, k+1-x\}$ allora $U_x = (x-\epsilon, x+\epsilon)$ e' un intorno aperto di x che e' disgiunto da $\mathbf{Z}$; a fortiori $U_x \setminus \{x\}$ non ha punti in comune con $\mathbf{Z}$. Quindi $x \notin D(\mathbf{Z})$.

Se invece $x = k \in \mathbf{Z}$, prendendo $0 < \epsilon < 1$, $U_k = (k-\epsilon, k+\epsilon)$ e' un intorno aperto di k che contiene solo k come punto intero; pertanto $U_k \setminus \{k\}$ non ha punti in comune con $\mathbf{Z}$. Dunque

$$D(\mathbf{Z}) = \emptyset \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}^* = I(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Da questo deduciamo anche che $\mathbf{Z}$ e' chiuso in $\mathbf{R}$ nella topologia euclidea.

• Consideriamo ora $\mathbf{Q}$. Poiche' $\mathbf{Q}$ e' denso in $\mathbf{R}$, abbiamo che $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cup D(\mathbf{Q})$. Agilmente si verifica che

$$D(\mathbf{Q}) = \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}^* = I(\mathbf{Q}) = \emptyset.$$

• Consideriamo l'insieme T. Abbiamo che $[0,1] = \overline{(0,1]} = (0,1] \cup D((0,1]) = D((0,1])$, i.e.

$$D((0,1]) = [0,1] \quad \text{e} \quad (0,1]^* = I((0,1]) = \emptyset.$$

• Notiamo che

$$S = \left\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}} \dot{\cup} \left\{-1-\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ dispari}}.$$

Notiamo che la sottosuccessione $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}}$ converge a 1 nella topologia euclidea, i.e. 1 e' di accumulazione per $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}}$ e dunque di aderenza per $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}}$. Pertanto

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}} \cup \{1\} \subseteq \overline{\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}}}.$$

Notiamo invece che ogni

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left(\left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}_{n \text{ pari}} \cup \{1\} \right)$$

e' punto interno, i.e. non e' aderente a $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n \text{ pari}}$. Da cio' deduciamo che

$$\left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}_{n \text{ pari}} \cup \{1\} = \overline{\left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}_{n \text{ pari}}}.$$

Con ragionamenti analoghi ai precedenti, otteniamo

$$\overline{\left\{ -1 - \frac{1}{n} \right\}_{n \text{ dispari}}} = \left\{ -1 - \frac{1}{n} \right\}_{n \text{ dispari}} \cup \{-1\}.$$

Pertanto, poiche' per ogni sottoinsieme T di uno spazio topologico si ha $\overline{T} = T \cup D(T)$, deduciamo che

$$\{-1,\ 1\} \subseteq D\,(S)\,.$$

Notiamo inoltre che gli elementi di S sono tutti punti isolati: prendiamo ad esempio $1 + \frac{1}{n}$, ricordando che in questo caso n e' un naturale pari; per esso vale ovviamente

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n-1};$$

prendendo $\epsilon = \min\left\{\frac{1}{n(n+1)},\ \frac{1}{n(n-1)}\right\}$ si ha che $(1 + \frac{1}{n} - \epsilon, 1 + \frac{1}{n} + \epsilon)$ e' un intorno aperto di $1 + \frac{1}{n}$ che non ha ulteriori punti in comune con S. Analoghi discorsi si possono fare per gli elementi di $\left\{-1 - \frac{1}{n}\right\}_{n \text{ dispari}}$. Pertanto S e' costituito da tutti punti isolati. In definitiva abbiamo

$$D\,(S) = \{-1,\ 1\} \quad \text{e} \quad S^* = I\,(S) = S.$$

5.6) (i) I punti in X sono chiusi, dunque X e' T_1. Visto che gli aperti sono complementari di insiemi finiti, dati $x \neq y \in \mathbf{R}$ ogni intorno aperto U_x di x interseca un qualsiasi intorno aperto U_y di y. Pertanto X non e' T_2

(ii) Rifacendoci al punto precedente, ogni $z \in U_x \cap U_y$ e' tale che $(z, z) \in \Delta_X$. Pertanto, $(X \times X) \setminus \Delta_X$ non e' aperto: ogni $(a, b) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$, i.e. $a \neq b \in X$, non ammette un intorno aperto $W \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$. Dunque Δ_X non e' chiusa. Ricordiamo che nelle precedenti esercitazioni avevamo dimostrato che infatti che : *X e' T_2 se e solo se Δ_X chiusa*

(iii) Consideriamo

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Notiamo che $Im(f) = [0, +\infty)$; se $y \in (0, +\infty)$ allora $f^{-1}(\{y\}) = \left\{-\frac{1}{y}, \frac{1}{y}\right\}$ che e' chiuso in X, se invece $y = 0$, allora $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ che comunque e' chiuso. Per la definizione di topologia cofinita, ne segue che f e' un'applicazione continua.

Similmente, consideriamo

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Notiamo che $Im(g) = \{-1\} \,\dot{\cup}\, (0, +\infty)$; se $y \in (0, +\infty)$ allora come prima $g^{-1}(\{y\}) = \left\{-\frac{1}{y}, \frac{1}{y}\right\}$ che e' chiuso in $\mathcal{U}_{\text{Cof}}$, se invece $y = -1$, allora $g^{-1}(\{-1\}) = \{0\}$ che comunque e' chiuso. Ne segue che anche g e' un'applicazione continua.

Notiamo che f e g coincidono su $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ che e' denso in $\mathbf{R}$ (per definizione di topologia cofinita) ma non coincidono su tutto $\mathbf{R}$ visto che $f(0) = 0 \neq g(0) = -1$.

Ricordiamo che nelle precedenti esercitazioni avevamo dimostrato infatti che : $f, g : X \to Y$ *applicazioni continue, con Y spazio topologico T_2, tali che f e g coincidono su un sottoinsieme A denso di X, allora f e g devono coincidere su tutto X*; per dimostrare questo fatto avevamo usato che la diagonale Δ_Y era chiusa, proprieta' equivalente al fatto che Y debba essere T_2.

(iv) Si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \mathbf{R}.$$

In effetti, non essendo T_2, il limite di una successione non e' necessariamente unico.

Verifichiamo che ogni $a \in \mathbf{R}$ e' limite della successione. Ogni intorno (aperto) di a sara' della forma $U_a = \mathbf{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_t\}$, ove $t < +\infty$. Poiche' la successione ha tutti elementi distinti, al piu' t elementi della successione non appartengono ad U_a. Pertanto, esiste $n_{U_a} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq n_{U_a}$ sia ha $x_n \in U_a$, per ogni $n \geq n_{U_a}$, i.e. $1/n$ converge ad a.

5.7) (a) Se N_x e' un qualsiasi intorno di x in $\mathcal{U}_{\mathrm{SSA}}$, vuol dire che esiste $a_x \in \mathbf{R}$ tale che $x \in (-\infty, a_x) \subseteq N_x$. Prendiamo ora, per ogni $x \in \mathbf{R}$, la famiglia

$$\mathcal{B}(x) := \left\{ \left(-\infty, x + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Essa e' una famiglia di intorni aperti di x che e' manifestamente numerabile. Prendiamo, come sopra, N_x un qualsiasi intorno di x e, sempre come sopra, consideriamo

$$x \in (-\infty, a_x) \subseteq N_x.$$

Poiche' $x < a_x$, deve esistere $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $x + \frac{1}{n_0} < a_x$ e pertanto

$$x \in \left(-\infty, x + \frac{1}{n_0} \right) \subset (-\infty, a_x) \subseteq N_x.$$

Questo prova che $\mathcal{B}(x)$ e' un sistema fondamentale di intorni per x in $\mathcal{U}_{\mathrm{SSA}}$. E dunque $\mathcal{N}_1$ e' soddisfatta.

(b) Consideriamo la famiglia di aperti

$$\mathcal{B} := \{(-\infty, q)\}_{q \in \mathbf{Q}}$$

che e' manifestamente numerabile. Per ogni aperto $U = (-\infty, a) \in \mathcal{U}_{\mathrm{SSA}}$ e per ogni $x \in U$, se prendiamo $q_x \in \mathbf{Q}$ tale che $x < q_x < a$ abbiamo che $x \in (-\infty, q_x) \subseteq (-\infty, a)$ con $(-\infty, q_x) \in \mathcal{B}$, cioe' $\mathcal{B}$ e' una base per $\mathcal{U}_{\mathrm{SSA}}$. Dunque $\mathcal{N}_2$ e' soddisfatta.

5.8) (i) Dimostriamo l'eguaglianza per doppia inclusione.

($\subseteq$) Per definizione di $\mathcal{B}(x)$, abbiamo che $x \in B$, per ogni $B \in \mathcal{B}(x)$. Pertanto $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}(x)} B$, i.e.

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}(x)} B.$$

($\supseteq$) Per ipotesi, se $y \in X \setminus \{x\}$, esiste un aperto $U_x \in \mathcal{U}(x)$ tale che $y \notin U_x$ ma $x \in U_x$. Pertanto U_x e' un intorno aperto di x che non contiene y. Poiche' $\mathcal{B}(x)$ e' un sistema fondamentale di intorni di x, i.e. una base locale per gli intorni di x, deve esistere un $B_x in \mathcal{B}(x)$ tale che

$$x \in B_x \subseteq U_x.$$

In particolare $y \notin B_x$ e dunque $y \notin \bigcap_{B \in \mathcal{B}(x)} B$. Poiche' questo discorso vale per ogni $y \in X \setminus \{x\}$, allora necessariamente si ha $\bigcap_{B \in \mathcal{B}(x)} B \subseteq \{x\}$.

(ii) Dimostriamo la doppia implicazione.

($\Rightarrow$) Dalla proprieta' (*), per ogni punto $x \in X$, l'aperto U_y e' interamente contenuto nel complementare di $\{x\}$, i.e. $X \setminus \{x\}$ e' aperto. Dunque $\{x\}$ e' chiuso. $(X, \mathcal{U}_X$ e' dunque T_1.

($\Leftarrow$) Per ipotesi, ogni punto e' un chiuso di X, i.e. X e' uno spazio topologico T_1. Pertanto, per ogni $x \neq y \in X$ abbiamo che $U_y := X \setminus \{x\}$ e' un intorno aperto di y non contenente x e $U_x := X \setminus \{y\}$ e' un intorno aperto di x non contenente y. Questi due aperti soddisfano la proprieta' (*).

5.9) Supponiamo per assurdo che S sia un insieme finito, $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Se $n = 1$, allora $S = I(S) = \{x_1\}$, ma allora $D(S) = \emptyset$ contro le ipotesi.

Si deve percio' avere necessariamente $n \geq 2$. Notiamo che S e' chiuso visto che, per l'esercizio precedente, la proprieta' (*) e' equivalente a dire che i punti di X sono chiusi (i.e. X e' T_1) e visto che S e' unione di un numero finito di punti. Pertanto, visto che per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$ si ha sempre

$$\overline{T} = T \cup D(T),$$

ne segue che $D(S) \subseteq S$.

Visto pero' che i punti sono chiusi (dalla proprieta' (*)) e che S ha cardinalita' finita, abbiamo che per ogni $x \in S$ si ha che

$$S_x := S \setminus \{x\}$$

e' ancora un chiuso non vuoto in X. Pertanto

$$U_x := X \setminus S_x$$

e' un intorno aperto di x in X per cui

$$U_x \cap S = \{x\},$$

i.e. qualunque $x \in S$ e' un punto isolato. Questo comporta che

$$S = S^* = I(S).$$

Dunque

$$D(S) \subseteq S = S^* = I(S).$$

Poiche' pero' per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$ sia ha sempre

$$D(T) \cap T^* = D(T) \cap I(T) = \emptyset,$$

si dovrebbe avere $D(S) = \emptyset$ che e' contro l'ipotesi. Dunque S e' di cardinalita' infinita.

5.10) Ricordiamo che uno spazio topologico si dice $\mathcal{N}_2$ se ammette una base numerabile.

Prendiamo come $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{\mathrm{Cof}}$ la topologia cofinita e mostriamo che non è $\mathcal{N}_2$. Supponiamo per assurdo che esista una base numerabile

$$\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Per definizione di base per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $B_n \in \mathcal{U}'$. Per definizione di topologia cofinita abbiamo

$$B_n = \mathbf{R} \setminus K_n$$

per un insieme finito $K_n \subset \mathbf{R}$.

Notiamo ora che l'insieme $\bigcup_n K_n$ ha cardinalità al più numerabile. Poiché $\mathbf{R}$ è più che numerabile, deve esistere un $x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_n K_n$. Prendiamo allora $y \in \mathbf{R} \setminus \{x\}$. Poiché $\mathcal{B}$ è una base e $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ è un aperto (infatti $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Cof}})$ soddisfa la proprieta' (*) dell'Esercizio 5.7, pertanto i punti sono chiusi), allora deve esistere un n tale che $y \in B_n \subseteq \mathbf{R} \setminus \{x\}$. Pertanto $\mathbf{R} \setminus K_n \subseteq \mathbf{R} \setminus \{x\}$, ma allora $x \in K_n$, che è un assurdo.

Prendiamo come $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ la topologia del limite superiore o di Sorgenfrey degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra, ovvero la topologia generata da $\{(s,t] \mid s < t\}$. Facciamo vedere che neppure essa è $\mathcal{N}_2$. Sia dunque $\mathcal{B}$ una base per $\mathcal{U}''$. Notiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}$ l'intervallo $(-\infty, x]$ è aperto. Allora poiché $\mathcal{B}$ è una base, per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq (-\infty, x]$. Abbiamo allora ottenuto una sottofamiglia di $\mathcal{B}$:

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{B_x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Osserviamo ora che se $y > x$ allora $y \notin (-\infty, x]$ e quindi $y \notin B_x$, da cui segue $B_y \neq B_x$. Allora concludiamo che $\widetilde{B}$ è in biiezione con $\mathbf{R}$ e pertanto ha la cardinalità del continuo. Ne segue che $\mathcal{B}$ non può essere numerabile.