Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 4 Esercizi

[1]

4.1) Sia $(X,\mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico. Definiamo

$$\Delta_X := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\} \subset X \times X,$$

denominata la *diagonale* in $X \times X$. Dimostra che X e' di Hausdorff se e solo se la diagonale Δ_X e' un chiuso di $X \times X$ (munito della topologia prodotto $\mathcal{U}_{X\times X}$).

4.2) Siano X e Y due spazi topologici, con Y di Hausdorff e sia $A \subset X$ un sottoinsieme denso. Siano date

$$f, g : X \to Y$$

due applicazioni continue tali che

$$f(x) = g(x),\ \forall\ x \in A.$$

Dimostrare allora che $f = g$, i.e. $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.

4.3) Siano $(X,\mathcal{U}_X)$ e $(Y,\mathcal{U}_Y)$ due spazi topologici, con Y di Hausdorff. Sia $f : X \to Y$ una qualsiasi applicazione continua. Provare che il grafico dell'applicazione f, definito come

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$$

e' un chiuso nello spazio topologico prodotto $(X \times Y,\ \mathcal{U}_{X\times Y})$.

4.4) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{Eucl})$ definiti da

$$A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\} \text{ e } B = \{(x, y)|2x^2 + 6y^2 = 1\}.$$

4.5) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{Eucl})$ definiti da

$$A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\} \text{ e } B = \{(x, y)|x = \pm 1\}.$$

4.6) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{Eucl})$ definiti da

$$A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\} \text{ e } B = \{(x, y)|x = \pm 1, -1 < y < 1\}.$$

4.7) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ un suo sottospazio topologico. Per ogni sottoinsieme S di Y è possibile considerare la chiusura $\overline{S}$ di S in X e la chiusura, che denotiamo con $\overline{S}^Y$, di S in Y nella topologia indotta da X. Mostra che $\overline{S} \cap Y = \overline{S}^Y$.

4.8) Consideriamo $(\mathbf{R}^n,\mathcal{U}_{\mathrm{Eucl}})$ e prendiamo i sottospazi topologici (con topologia indotta) $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e S^{n-1}, dove S^{n-1} la (iper)sfera di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1. Dimostrare che $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e' omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbf{R}$, dove $\mathbf{R}$ munito della topologia euclidea.

4.9) Si consideri lo spazio topologico $\mathbf{R}^3$, munito di topologia euclidea. Sia $Y \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio definito da

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

denominato **cilindro circolare**. Si consideri inoltre il sottospazio $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ dato dalla **sfera** di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1 e siano $N, S \in S^2$ i punti $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ rispettivamente **polo nord** e **polo sud** della sfera. Dimostra che Y e' omeomorfo a $S^2 \setminus \{N, S\}$.

[1]Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo