Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 4 Esercizi - SVOLGIMENTI
[1]

4.1) Sia $(X,\mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico. Definiamo

$$\Delta_X := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\} \subset X \times X,$$

denominata la *diagonale* in $X \times X$. Dimostra che X e' di Hausdorff se e solo se la diagonale Δ_X e' un chiuso di $X \times X$ (munito della topologia prodotto $\mathcal{U}_{X\times X}$).

4.2) Siano X e Y due spazi topologici, con Y di Hausdorff e sia $A \subset X$ un sottoinsieme denso. Siano date

$$f, g : X \to Y$$

due applicazioni continue tali che

$$f(x) = g(x), \ \forall\, x \in A.$$

Dimostrare allora che $f = g$, i.e. $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.

4.3) Siano $(X,\mathcal{U}_X)$ e $(Y,\mathcal{U}_Y)$ due spazi topologici, con Y di Hausdorff. Sia $f : X \to Y$ una qualsiasi applicazione continua. Provare che il grafico dell'applicazione f, definito come

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$$

e' un chiuso nello spazio topologico prodotto $(X \times Y,\ \mathcal{U}_{X\times Y})$.

4.4) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{Eucl})$ definiti da

$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 = 1\} \ \text{ e } \ B = \{(x,y)|2x^2 + 6y^2 = 1\}.$$

4.5) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{Eucl})$ definiti da

$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\} \ \text{ e } \ B = \{(x,y)|x = \pm 1\}.$$

4.6) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{Eucl})$ definiti da

$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\} \ \text{ e } \ B = \{(x,y)|x = \pm 1, -1 < y < 1\}.$$

4.7) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ un suo sottospazio topologico. Per ogni sottoinsieme S di Y è possibile considerare la chiusura $\overline{S}$ di S in X e la chiusura, che denotiamo con $\overline{S}^Y$, di S in Y nella topologia indotta da X. Mostra che $\overline{S} \cap Y = \overline{S}^Y$.

4.8) Consideriamo $(\mathbf{R}^n,\mathcal{U}_{\text{Eucl}})$ e prendiamo i sottospazi topologici (con topologia indotta) $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e S^{n-1}, dove S^{n-1} la (iper)sfera di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1. Dimostrare che $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e' omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbf{R}$, dove $\mathbf{R}$ munito della topologia euclidea.

4.9) Si consideri lo spazio topologico $\mathbf{R}^3$, munito di topologia euclidea. Sia $Y \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio definito da

$$Y := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

denominato **cilindro circolare**. Si consideri inoltre il sottospazio $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ dato dalla **sfera** di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1 e siano $N, S \in S^2$ i punti $N = (0,0,1)$ e $S = (0,0,-1)$ rispettivamente **polo nord** e **polo sud** della sfera. Dimostra che Y e' omeomorfo a $S^2 \setminus \{N,S\}$.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

Svolgimenti

4.1) ($\Rightarrow$) Supponiamo che X sia di Hausdorff e dimostriamo che la diagonale e' chiusa per la topologia prodotto. Sia $(a, b) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$, cioe' $a \neq b$. Siccome X e' di Hausdorff esistono aperti disgiunti U e V di X tali che $a \in U$ e $b \in V$. Allora $U \times V$ e' aperto in $X \times X$, contiene (a, b), e non interseca la diagonale Δ_X perche' $U \cap V = \emptyset$. Quindi e' $U \times V$ e' tutto contenuto in $(X \times X) \setminus \Delta_X$, i.e. $(X \times X) \setminus \Delta_X$ e' un aperto, dunque Δ_X e' chiuso.

($\Leftarrow$) Ora supponiamo che la diagonale Δ_X sia chiusa per la topologia prodotto e dimostriamo che X e' di Hausdorff. Siano $a \neq b \in X$. Quindi $(a, b) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$. Siccome per ipotesi la diagonale Δ_X e' chiusa, allora $(X \times X) \setminus \Delta_X$ e' un aperto. Per definizione di topologia prodotto, esistono aperti $U, V \subset X$ tali che $(a, b) \in U \times V$ tali che $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta_X$, ovvero $U \cap V = \emptyset$.

4.2) Usiamo l'esercizio precedente. Sia

$$\Phi : X \to Y \times Y, \quad x \to (f(x), g(x)).$$

L'applicazione Φ e' continua visto che sia f che g lo sono (visto nella terza esercitazione).

Per l'esercizio precedente, visto che Δ_Y e' chiusa in $Y \times Y$ e visto che Φ e' continua, abbiamo che $\Phi^{-1}(\Delta_Y)$ e' un chiuso di X. Notiamo che

$$\Phi^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Dalle ipotesi fatte, $A \subseteq \Phi^{-1}(\Delta_Y) \subseteq X$. Passando alle chiusure, utilizzando il fatto che A e' denso in X e $\Phi^{-1}(\Delta_Y)$ gia' chiuso, si ottiene

$$X = \overline{A} \subseteq \overline{\Phi^{-1}(\Delta_Y)} = \Phi^{-1}(\Delta_Y) \subseteq X,$$

i.e. $\Phi^{-1}(\Delta_Y) = X$. Questo significa che f e g coincidono su tutto X.

4.3) Anche qui usiamo il primo esercizio. Consideriamo la funzione

$$\Psi : X \times Y \to Y \times Y$$

data da

$$\Psi(x, y) = (f(x), y).$$

La funzione Ψ e' continua perche' definita da $f \times Id_Y$, entrambi continue. Per concludere e' sufficiente notare che $\Gamma_f = \Psi^{-1}(\Delta_Y)$ e ricordare che Δ_Y e' chiusa in $Y \times Y$.

4.4) Consideriamo $\mathbf{R}^2$ con la topologia euclidea e, per ogni $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, definiamo la funzione

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (ax, by).$$

Notiamo che è biunivoca con inversa $(x, y) \mapsto (a^{-1}x, b^{-1}y)$. Inoltre, per proprieta' universale del prodotto ($\mathbf{R}^2$ e' omeomorfo a $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, F è continua e aperta perche' a componenti continue ed aperte.

Nel nostro caso, prendiamo $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = 1/\sqrt{6}$. La restrizione di F ad A e' un'applicazione f, la cua immagine e' proprio B, infatti

$$f : A \to B, (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{6}} \right)$$

visto che

$$x^2+y^2=1 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{6}\frac{y}{\sqrt{6}}\right)^2=1 \;\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+6\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)^2=1$$

f è dunque effettivamente ben definita e biiettiva tra A e B.

Il fatto che f sia continua ed aperta si ottiene osservando che e' restrizione di funzione continua ed aperta a sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ che consideriamo con la topologia euclidea indotta.

4.5) Abbiamo

$$A=A_1 \sqcup A_2, \quad A_1=\{(x,y)\in A \mid x>0\},\; A_2=\{(x,y)\in A \mid x<0\}.$$

e

$$B=B_1 \sqcup B_2, \quad B_1=\{(1,y)\mid y\in\mathbf{R}\},\; B_2=\{(-1,y)\mid y\in\mathbf{R}\}.$$

Notiamo che A_1 e A_2, risp. B_1 e B_2, sono omeomorfi tramite $(x,y)\mapsto(-x,y)$. Pertanto è sufficiente mostrare che A_1 è omeomorfo a B_1.

L'omeomorfismo si ottiene come segue: una generica retta per l'origine ha equazione della forma $y=mx$ per $m\in\mathbf{R}$ ed interseca A_1 e B_1 in esattamente un punto ciascuno; facendo variare m in $\mathbf{R}$ si ottiene la biezione cercata. Esplicitamente:

$$A_1\to B_1, \quad (x,y)\mapsto(1,y/x),$$

e

$$B_1\to A_1, \quad (1,y)\mapsto\left(\sqrt{\frac{1}{1+y^2}},\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2}}\right).$$

4.6) Abbiamo

$$A=A_1 \sqcup A_2, \quad A_1=\{(x,y)\in A \mid x>0\},\; A_2=\{(x,y)\in A \mid x<0\}.$$

e

$$B=B_1 \sqcup B_2, \quad B_1=\{(1,y)\mid y\in(-1,1)\},\; B_2=\{(-1,y)\mid y\in(-1,1)\}.$$

Come nel punto precedente e' sufficiente far vedere che A_1 e B_1 sono omeomorfi. L'omeomorfismo cercato è

$$f: A_1\to B_1, \quad (x,y)\mapsto(1,y)$$

con inversa

$$f^{-1}: B_1\to A_1, \quad (1,y)\mapsto(\sqrt{1-y^2},y).$$

4.7) Ricordiamo dapprima che se $C\subseteq Y$ e' chiuso in Y, allora $C=Y\cap F$ per un qualche F chiuso di X. Infatti C chiuso se e solo se esiste aperto $U\subseteq Y$ tale che $C=Y\setminus U$; ma $U\subseteq Y$ aperto se e solo se esiste un aperto V in X tale che $U=Y\cap V$, ma allora $C=Y\setminus U=Y\setminus(Y\cap V)=Y\cap(X\setminus V)$ e dunque $F:=X\setminus V$ è il chiuso che cerchiamo.

Facciamo vedere che $\overline{S}\cap Y=\overline{S}^Y$.

($\subseteq$) Notiamo prima di tutto che $\overline{S}^Y$ è chiuso in Y e pertanto, per quanto visto preliminarmente, esiste un chiuso F di X tale che $\overline{S}^Y=F\cap Y$. Ma allora poiché $S\subseteq Y\cap F\subseteq F$ e la chiusura di un insieme è il chiuso più piccolo che lo contiene, deve valere $\overline{S}\subseteq F$ e quindi $\overline{S}\cap Y\subseteq F\cap Y=\overline{S}^Y$.

($\supseteq$). Poiché $S\subseteq Y$, deve valere $S\subseteq Y\cap\overline{S}$. Ma poiché $\overline{S}$ è chiuso in X allora $Y\cap\overline{S}$ è chiuso in Y e dunque, dato che contiene S, ne deve contenere la sua chiusura in Y: $\overline{S}^Y\subseteq Y\cap\overline{S}$

4.8) Ricordiamo che a lezione (Prof.ssa Tovena) avete visto che $\mathbf{R}$ con topologia euclidea e' omeomorfo al suo sottospazio $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$ (un omeomorfismo esplicito e' dato dalla funzione exp). Dunque

$$S^{n-1} \times \mathbf{R} \simeq S^{n-1} \times (0, +\infty)$$

(l'omeomorfismo esplicito e' dato dalla coppia di omeomorfismi $(Id_{S^{n-1}}, \exp)$).

Notiamo che, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, si ha $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \in S^{n-1}$. Quindi possiamo definire l'applicazione

$$\phi : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1} \times (0, +\infty)$$

in questo modo

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\phi} \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},\ |\mathbf{x}| \right).$$

Notiamo che ϕ e' continua, perche' a componenti continue (ricordare Esercitazione 3)

Notiamo che ϕ e' aperta, perche' a componenti aperte (ricordare Esercitazione 3)

L'applicazione ϕ e' suriettiva: ogni coppia $(\mathbf{w}, t)$ del codominio proviene, mediante ϕ, dal vettore $\mathbf{y} = t\mathbf{w}$ per cui $|\mathbf{y}| = |t\mathbf{w}| = |t||\mathbf{w}| = t$, l'ultima uguaglianza discende dal fatto che $t > 0$ per ipotesi e che $|\mathbf{w}| = 1$ per ipotesi. Questo in particolare dimostra che $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

L'applicazione ϕ e' iniettiva: verifica immediata.

L'inversa ϕ^{-1} e' definita da

$$(\mathbf{w}, t) \to t \cdot \mathbf{w}$$

come implicitamente gia' descritto sopra.

4.9) Ricordiamo che $\mathbf{R}^3$ e' omeomorfo a $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. In tale omeomorfismo, il cilindro circolare Y risulta essere in biiezione con $S^1 \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R^2} \times \mathbf{R}$, dove $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ la circonferenza di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1. Infatti una parametrizzazione per Y e' data da

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = t,\ \ \theta \in [0, 2\pi),\ t \in \mathbf{R}.$$

Proprio la parametrizzazione fornisce l'omeomorfismo tra Y e $S^1 \times \mathbf{R}$.

D'altra parte, a lezione (Prof.ssa Tovena) avete dimostrato che $S^2 \setminus \{N\} \subset \mathbf{R}^3$ e' omeomorfo, mediante **proiezione streografica**, a $\mathbf{R}^2$ identificato con il piano (sottospazio) di equazione cartesiana $z = 0$ in $\mathbf{R}^3$. In tale omeomorfismo, $S^2 \setminus \{N, S\}$ e' omeomorfo a $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Si tratta dunque di dimostrare che $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e' omeomorfo a $S^1 \times \mathbf{R}$. Ma questo e' cio' che e' stato dimostrato nell'esercizio precedente.