Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 3 Esercizi - SVOLGIMENTI
[1]

3.1) * Siano X e Y spazi topologici finiti, entrambi con topologia discreta od entrambi con topologia banale. Mostra che X è omeomorfo a Y se e solo se card(X)=card(Y).

3.2) Sia $f : X \to \mathbf{R}$ una applicazione continua da uno spazio topologico X alla retta reale dotata di topologia euclidea. Mostra che, per ogni $x \in X$ con $f(x) \neq 0$, esiste un aperto U di X contenente x tale che $f(y) \neq 0$ $\forall y \in U$.

3.3) Sia X uno spazio topologico; su $\mathbf{R}$ si consideri la topologia euclidea. Data una funzione continua $f : X \to \mathbf{R}$ tale che $f(x) \neq 0$ $\forall x \in X$, mostra che $1/f : X \to \mathbf{R}, x \to 1/f(x)$ è continua.

3.4) In uno spazio topologico sono equivalenti:

a) la intersezione di ogni famiglia di aperti è un aperto.

b) la unione di ogni famiglia di chiusi è un chiuso

c) la famiglia dei chiusi è la famiglia degli aperti in una topologia (eventualmente differente da quella assegnata).

3.5) * Siano $\mathcal{H} = \{\mathbf{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, a], \forall a \in \mathbf{R}\}$ e $\mathcal{U}_{ssa} = \{\mathbf{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, b), \forall b \in \mathbf{R}\}$.

a) Verifica che $\mathcal{H}$ non è una topologia su $\mathbf{R}$ ma è base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbf{R}$.

b) Determina la topologia $\mathcal{T}$ generata da $\mathcal{H}$ e confrontala con la topologia $\mathcal{U}_{ssa}$.

3.6) * Siano X e Y spazi topologici, $A \subset X$ e $B \subset Y$ sottoinsiemi. Mostra o contraddici che $\overset{o}{\overbrace{A \times B}} = \overset{o}{A} \times \overset{o}{B}$ e $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

3.7) * Sia $X = \mathbf{R}$.

(i) Si consideri il sottoinsieme delle parti di X dato da

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, +\infty)\}.$$

Determinare la topologia $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ che ha $\mathcal{S}$ come pre-base e stabilire se $\mathcal{S}$ e' base per tale topologia.

(ii) Fare un esempio di pre-base per una topologia su $\mathbf{R}$ che non sia una base.

3.8) * Dati due spazi topologici $(X, \mathcal{U}_X)$ e $(Y, \mathcal{U}_Y)$. Le applicazioni di proiezione

$$\pi_X : X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x, \quad \pi_Y : X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y$$

sono continue, suriettive ed aperte.

3.9) * Considera due applicazioni $f : X_1 \to Y_1$ e $g : X_2 \to Y_2$ tra spazi topologici. Considera inoltre l'applicazione $F : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ tra gli spazi prodotto definita da $F(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$, $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Mostra che

a) F è continua se e solo se f e g sono continue.

b) F è aperta se e solo se f e g sono aperte.

c) F è omeomorfismo se e solo se f e g sono omeomorfismi.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

Svolgimenti

3.1) ($\Leftarrow$). Siano $(X,\mathcal{U}_X)$ ed $(Y,\mathcal{U}_Y)$ due spazi topologici con la proprietà che $\#X, \#Y < \infty$. Allora se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo deve prima di tutto essere una biiezione, pertanto $\#X = \#Y$ (indipendentemente dalle topologie $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$).

($\Rightarrow$). Viceversa, se $\#X = \#Y$ ed $f : X \to Y$ è una biiezione (esiste perché i due insiemi hanno la stessa cardinalità), allora f^{-1} esiste e dobbiamo verificare che sono entrambe continue.

- Sia $\mathcal{U}_X = \{X, \emptyset\}$ e $\mathcal{U}_Y = \{\emptyset, Y\}$. Allora $f^{-1}(Y) = X$ e $(f^{-1})^{-1}(X) = f(X) = Y$ e pertanto f è continua con inversa continua, ovvero è un omemorfismo.
- Nel caso $(X,\mathcal{U}_{discr})$ e $(Y,\mathcal{U}_{discr})$ la tesi segue da 3.2)b).

3.2) Sia $x \in X$ tale che $f(x) \neq 0$. Allora $|f(x)| > 0$ e quindi esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $|f(x)| = \varepsilon > 0$. Consideriamo ora l'aperto $B_\varepsilon(f(x)) = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Allora per ogni $z \in B_\varepsilon(f(x))$ vale $z \neq 0$. Poiché $B_\varepsilon(f(x))$ è aperto ed f è continua, abbiamo che $U := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \in \mathcal{U}_X$. Questo è l'aperto cercato.

3.3) Sappiamo che tutti gli aperti di $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{eucl})$ sono unioni di intervalli aperti, pertanto per dimostrare che $1/f$ è continua ci basta far vedere che la preimmagine di ogni intervallo (a, b) $(a < b)$ è a sua volta aperta. Notiamo che se $a, b, z \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ allora $a < z < b$ se e solo se $\frac{1}{b} < \frac{1}{z} < \frac{1}{a}$. Pertanto se $0 \notin (a, b)$ abbiamo che

$$(1/f)^{-1}\left((a, b)\right) = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)\right) \in \mathcal{U}_X.$$

Se $0 \in (a, b)$, possiamo allora scrivere $(a, b) = (a, 0)\cup\{0\}\cup(0, b)$ e $(1/f)^{-1}((a, b)) = (1/f)^{-1}((a, 0))\cup (1/f)^{-1}(\{0\}) \cup (1/f)^{-1}((0, b))$. La tesi ora segue applicando il ragionamento di prima agli intervalli $(a, 0)$ e $(0, b)$ e notando che $(1/f)^{-1}(0) = \emptyset$.

3.4) *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Sia $\{C_i \mid i \in I\}$ una famiglia (arbitraria) di chiusi di uno spazio topologico $(X,\mathcal{U}_X)$ avente la proprietà che l'intersezione arbitraria di aperti è aperta. Per ogni $i \in I$ esiste un aperto $U_i \in \mathcal{U}_X$ tale che $C_i = X \setminus U_i$, e quindi

$$\bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} U_i\right).$$

Ma per ipotesi $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}_X$ e quindi $\bigcup_{i\in I} C_i$ è chiuso.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sia $\mathcal{C}$ l'insieme dei chiusi di uno spazio topologico $(X,\mathcal{U}_X)$ avente la proprietà che arbitrarie unioni di chiusi sono chiuse. Allora anche $\mathcal{C}$ è una topologia su X:

(T1) $X \in \mathcal{C}$ e $\emptyset \in \mathcal{C}$;

(T2) siano $C_i \in \mathcal{C}$ per ogni $i \in I$, allora per ipotesi $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{C}$;

(T3) siano $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{C}$, allora per ogni i esiste un $U_i \in \mathcal{U}_X$ tale che $C_i = X\setminus U_i$ e $C_1\cap\ldots\cap C_r = (X \setminus U_1) \cap \ldots \cap (X \setminus U_r) = X \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_r)$, ma $U_1 \cup \ldots \cup U_r \in \mathcal{U}_X$ (per (T2)applicato a $\mathcal{U}_X$) e quindi $C_1 \cap \ldots \cap C_r \in \mathcal{C}$.

3.5) *c)* $\Rightarrow$ *a)* Sia $(X,\mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico con la proprietà che l'insieme dei chiusi $\mathcal{C}$ di X è una topologia (verifica cioè (T1), (T2), (T3)). Sia $\{U_i \mid i \in I\}$ una famiglia (arbitraria) di aperti. Allora $C_i := X \setminus U_i \in \mathcal{C}$ per ogni $i \in I$ e abbiamo

$$\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} C_i.$$

Ma $\mathcal{C}$ verifica (T2) e quindi $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{C}$, da cui $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}_X$.

3.6) A lezione abbiamo gia' dimostrato che $\mathcal{U}_{ssa}$ e' una topologia, precisamente la **topologia delle semirette sinistre aperte**, i.e. la topologia degli intervalli illimitati a sinistra ed aperti necessariamente a destra.

a) $\mathcal{H}$ non è una topologia su $\mathbf{R}$ perché (T2) è contraddetto:

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}_{\geq 1}} \left(-\infty, 1-\frac{1}{k}\right] = (-\infty, 1) \notin \mathcal{H}.$$

Ricordiamo che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia $\mathcal{U}$ su X se (e solo se)

(B1) per ogni $x \in X$ esiste un $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$.

(B2) se $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ sono tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ allora per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste un $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Nel nostro caso:

(B1) per ogni $x \in \mathbf{R}$ vale $x \in (\infty, x] \in \mathcal{H}$;

(B2) siano $B_1 = (-\infty, a]$, $B_2 = (-\infty, b] \in \mathcal{H}$; possiamo supporre $a < b$, cosicché $B_1 \cap B_2 = (-\infty, a] \neq \emptyset$ e quindi per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ possiamo banalmente prendere $B = B_1 = (-\infty, a] \in \mathcal{H}$.

Abbiamo così dimostrato che $\mathcal{H}$ è una base per una topologia.

b) Ricordiamo che se $\mathcal{B}$ è una base, allora la topologia che essa genera è

$$\mathcal{U} = \{U \mid U \text{ è unione di elementi di } \mathcal{B}\}.$$

Sia $\{a_i \mid i \in I\}$ con $a_i \in \mathbf{R}$ e sia $m := \inf\{a_i \mid i \in I\}$. Allora

$$\bigcup_{i\in I}(-\infty, a_i] = \begin{cases} (-\infty, m] & \text{se esiste } \min\{a_i\}, \\ (-\infty, m) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Pertanto oltre ad elementi del tipo $(-\infty, a]$ otteniamo elementi del tipo $(-\infty, a)$: come nel punto precedente possiamo infatti prendere l'intersezione

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}_{\geq 1}} \left(-\infty, a-\frac{1}{k}\right] = (-\infty, a).$$

Pertanto la topologia che $\mathcal{H}$ genera è

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbf{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Ovviamente $\mathcal{U}_{sda} \subset \mathcal{U}$, la seconda esssendo strettamente piu' fine.

3.7) Ricordiamo che se $(X,\mathcal{U}_X)$ e $(Y,\mathcal{U}_Y)$ sono due spazi topologici, allora la topologia prodotto sul prodotto cartesiano $X \times Y$ ha una base data da

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U}_X,\ V \in \mathcal{U}_Y\}.$$

Vediamo subito che $\mathcal{I}_s \subseteq \mathcal{U}$ e quindi la topologia generata da $\mathcal{H}$ è più fine di $\mathcal{I}_s$.

a) Siano dunque $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Mostriamo che $\overset{o}{A} \times \overset{o}{B} = (A \overset{o}{\times} B)$.

$\subseteq$. Poiché $\overset{o}{A} \in \mathcal{U}_X$ e $\overset{o}{B} \in \mathcal{U}_Y$ per definizione di topologia prodotto $\overset{o}{A} \times \overset{o}{B}$ è aperto a sua volta (e contenuto in $A \times B$) e quindi $\overset{o}{A} \times \overset{o}{B} \subseteq (A \overset{o}{\times} B)$.

$\supseteq$. Poiché $(A \overset{o}{\times} B)$ è aperto, per definizione di topologia prodotto esistono collezioni di aperti $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{U}_X$ e $\{V_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{U}_Y$ tali che

$$(A \overset{o}{\times} B) = \bigcup_i (U_i \times V_i).$$

D'altronde, $(A \overset{o}{\times} B) \subseteq A \times B$ e pertanto $U_i \subseteq A$ e $V_i \subseteq B$ per ogni $i \in I$. Essendo aperti, deve valere $U_i \subseteq \overset{o}{A}$ e $V_i \subseteq \overset{o}{B}$. Ne segue che $(A \overset{o}{\times} B) \subseteq \overset{o}{A} \times \overset{o}{B}$.

b) Siano dunque $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Mostriamo che $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{(A \times B)}$.

$\subseteq$. Sia $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Allora $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$. Allora ogni aperto W in $\mathcal{U}_{X \times Y}$ che contiene x conterrà un aperto del tipo $U \times V$ con $a \in U \in \mathcal{U}_X$ e $b \in V \in \mathcal{U}_Y$. Ma poiché a, risp. b, è un punto di chiusura di A, risp. B, deve esistere un $u \in A$ tale che $u \in U \cap A$, risp. deve esistere un $v \in B$ tale che $v \in V \cap B$. Ne deduciamo che $(u, v) \in (U \times V) \cap (A \times B) \subseteq W \cap (A \times B)$.

$\supseteq$. Sia $(a, b) \in \overline{A \times B}$. Vogliamo far vedere che a è un punto di chiusura per A e che b è un punto di chiusura per B. Sia dunque $U \in \mathcal{U}_X$, risp. $V \in \mathcal{U}_Y$, un aperto che contiene a, risp. b. Allora per definizione di topologia prodotto, $U \times V \in \mathcal{U}_{X \times Y}$ e poiché (a, b) è punto di chiusura di $A \times B$ deve esistere un $(u, v) \in (U \times V) \cap (A \times B)$, che implica $u \in U \cap A$ e $v \in V \cap B$. Pertanto $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$.

3.8) (i) Notare che l'insieme delle intersezioni finite tra elementi di $\mathcal{S}$ producono o l'insieme vuoto oppure elementi di $\mathcal{S}$. Questo ci fa dedurre che $\mathcal{S}$ e' una base per la topologia da essa generata.

Calcolando le unioni a due a due degli elementi di $\mathcal{S}$ si ottengono tre ulteriori aperti di $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$. Ricalcolando le unioni di tutti questi aperti, si costruisce un unico ulteriore aperto che e' $\mathbf{R}$. Pertanto:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}} = \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, +\infty), \mathbf{R} \setminus \{0\}, (-\infty, 0], [0, +\infty), \mathbf{R}\}.$$

(ii) Se prendiamo

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (b, +\infty)\}_{a,b \in \mathbf{R}}$$

essa e' una pre-base per $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ su $\mathbf{R}$. Manifestamente $\mathcal{S}$ non puo' essere una base per $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$, perche' se $\emptyset \neq (-\infty, a) \cap (b, +\infty) = (b, a)$ allora per ogni $x \in (b, a)$ non esiste alcun elemento di $\mathcal{S}$ in esso interamente contenuto.

3.9) Siano $U \in \mathcal{U}_X$, risp. $V \in \mathcal{U}_Y$, allora $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{U}_{X \times Y}$, risp. $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{U}_{X \times Y}$. Questo dimostra al tempo stesso suriettività e continuità. Per vedere che sono anche aperte, basta verificare che ogni elemento di una base di $\mathcal{U}_{X \times Y}$ sia mandato in un aperto, ma ciò viene direttamente dalla definizione di topologia prodotto, poiché una base è data dagli elementi $U \times V$ con $U \in \mathcal{U}_X$ e $V \in \mathcal{U}_Y$ e quindi $\pi_X(U \times V) = U \in \mathcal{U}_X$ e $\pi_Y(U \times V) = V \in \mathcal{U}_Y$.

3.10) Per risolvere questo esercizio, usiamo il precedente.

a)($\Rightarrow$) Sia F continua e sia $U \in \mathcal{U}_{Y_1}$. Allora $f^{-1}(U) = \pi_{X_1}(F^{-1}(\pi_{Y_1}^{-1}(U)))$. Questo insieme è aperto poiché:

- π_{Y_1} è continua $\Rightarrow \pi_{Y_1}^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{Y_1 \times Y_2}$;
- F è continua $\Rightarrow F^{-1}(\pi_{Y_1}^{-1}(U)) \in \mathcal{U}_{X_1 \times X_2}$;
- π_{X_1} è aperta per l'esercizio precedente $\Rightarrow \pi_{X_1}(F^{-1}(\pi_{Y_1}^{-1}(U))) \in \mathcal{U}_{X_1}$.

Nello stesso modo si dimostra che $g^{-1}(V) = \pi_{X_2}(F^{-1}(\pi_{Y_2}^{1}(V))) \in \mathcal{U}_{X_2}$ per ogni $V \in \mathcal{U}_{Y_2}$.

($\Leftarrow$) Siano f e g continue. Per dimostrare che F è continua ci basta far vedere che la preimmagine di ogni elemento di una base di $\mathcal{U}_{Y_1 \times Y_2}$ è aperta. Siano dunque $U \in \mathcal{U}_{Y_1}$ e $V \in \mathcal{U}_{Y_2}$ allora

$F^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$. Ma f e g sono continue e quindi $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{X_1}$ e $g^{-1}(V) \in \mathcal{U}_{X_2}$, da cui $f^U \times g^{-1}(V) \in \mathcal{U}_{X_1 \times X_2}$.

b) ($\Leftarrow$). Sia F aperta e sia $U \in \mathcal{U}_{X_1}$. Allora $f(U) = \pi_{Y_1}(F(U \times X_2))$ che è aperto poiché $U \times Y \in \mathcal{U}_{X_1 \times X_2}$ e composizione di funzioni aperte è aperta.

($\Rightarrow$). Siano f, g aperte. Per dimostrare che F è aperta è sufficiente far vedere che $F(U \times V) \in \mathcal{U}_{Y_1 \times Y_2}$ per ogni $U \in \mathcal{U}_{X_1}$ e $V \in \mathcal{U}_{X_2}$. Questo è immediato poiché $F(U \times V) = f(U) \times g(V)$ ed essendo f, g aperte vale $f(U) \in \mathcal{U}_{Y_1}$, $g(V) \in \mathcal{U}_{Y_2}$ (pertanto $f(U) \times G(V) \in \mathcal{U}_{Y_1 \times Y_2}$).

c) Ricordiamo che una funzione continua f è un omeomorfismo se e solo se è biettiva ed è aperta. Allora la tesi segue immediatamente dai primi due punti di questo esercizio assieme all'osservazione che F è biunivoca se e solo se f e g sono biunivoche.