Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini

Foglio n. 2 Esercizi

[1]

2.1) In $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea, determina chiusura, interno e frontiera di $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0\}$ (risp., di $S_2 = \{(x, 0)|0 \leq x \leq 1\}$ e di $S_3 = \{(x, y)|0 < x, y \leq 1\}$).

2.2) Sia $(X, \mathcal{U})$ un qualsiasi spazio topologico e sia $Y \subset X$ un suo qualsiasi sottoinsieme. Dimostrare che
$$\overset{o}{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y}).$$

2.3) Sia (X, d) uno spazio metrico. Mostra che la chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme S è il sottoinsieme $\{x \in X \mid d(x, S) = 0\}$, ove con $d(x, S)$ si denoti la distanza di x da S, definita da
$$d(x, S) = inf\{d(x, s)| \, s \in S\}.$$

2.4) In un insieme infinito X considera la topologia $\mathcal{U}_{cof}$ dei cofiniti (gli aperti non vuoti sono, per definizione, i sottoinsieme con complementare finito).

i) Mostra che lo spazio topologico $(X, \mathcal{U}_{cof})$ non è metrizzabile.

ii) Mostra che ogni aperto non vuoto è denso in X.

iii) Supponi che $X = \mathbf{R}$. Determina chiusura, interno e frontiera di $[0, 1]$ (e di $\{1\}$).

iv) Supponi che $X = \mathbf{R}$. Mostra che $\mathcal{U}_{cof} \subset \mathcal{U}_{eucl}$. (**VISTO A LEZIONE**)

2.5) Considera un sottoinsieme A di uno spazio topologico $(X, \mathcal{U})$. Mostra che

i) A e $X \setminus A$ hanno la stessa frontiera. (**VISTO A LEZIONE**)

ii) La frontiera di $\overline{A}$ è contenuta nella frontiera di A.

iii) L'interno $\mathring{A}$ di A coincide con il proprio interno (cioè l'interno dell'interno di A coincide con l'interno di A).

iv) La frontiera dell'interno $\mathring{A}$ di A è contenuta nella frontiera di A.

v) $\mathring{A}$, $(X \overset{o}{\setminus} A)$ e la frontiera di A sono sottoinsiemi a due a due disgiunti. La loro unione è X.

vi) Se A è denso, allora l'interno $(X \overset{o}{\setminus} A)$ del complementare di A è vuoto.

2.6) Mostra che un sottoinsieme di uno spazio topologico è la chiusura di un aperto se e solo se è la chiusura del proprio interno.

2.7) In uno spazio topologico, mostra che un sottoinsieme ha frontiera vuota se e solo se è sia aperto che chiuso.

2.8) In un insieme X sia assegnata una funzione $\begin{array}{cccc} g : \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \mathcal{P}(X) \\ S & \mapsto & g(S) \end{array}$ con le proprietà che

a) $g(\emptyset) = \emptyset$;

b) $S \subseteq g(S)$;

c) $g(g(S)) = g(S)$;

d) $g(S_1 \cup S_2) = g(S_1) \cup g(S_2)$

per ogni sottoinsieme S, S_1, S_2 di X. Mostra che esiste una unica topologia su X tale che $g(S)$ coincida con la chiusura di S per ogni sottoinsieme S di X.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

2.9) Sia $f : (X,\mathcal{U}_X) \to (Y,\mathcal{U}_Y)$ una applicazione continua tra spazi topologici; mostra che, se $\mathcal{U}_Y^*$ è una topologia su Y meno fine di $\mathcal{U}_Y$, allora anche $f : (X,\mathcal{U}_X) \to (Y,\mathcal{U}_Y^*)$ è continua.

È vero che, se $\mathcal{U}_X^*$ è una topologia su X meno fine di $\mathcal{U}_X$, allora anche $f : (X,\mathcal{U}_X^*) \to (Y,\mathcal{U}_Y)$ è continua?

Deduci che l'applicazione identica $id_X(X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{U}')$ è continua se e solo se la topologia $\mathcal{U}'$ nel codominio è meno fine della topologia $\mathcal{U}$ nel dominio.

2.10) Siano X e Y insiemi non vuoti.

a) Su X è assegnata la topologia concreta $\mathcal{U}_X$. Su Y è assegnata la topologia cofinita $\mathcal{U}_{Y,cof}$. Mostra che le applicazioni continue $(X,\mathcal{U}_X) \to (Y,\mathcal{U}_{Y,cof})$ sono tutte e sole le applicazioni costanti.

b) Su X è assegnata la topologia discreta $\mathcal{U}_{X,discr}$. Su Y è assegnata una topologia $\mathcal{U}_Y$. Mostra che tutte le applicazioni $(X,\mathcal{U}_{X,discr}) \to (Y,\mathcal{U}_Y)$ sono continue.

2.11) Siano X e Y insiemi infiniti e siano $\mathcal{U}_{X,cof}$ e $\mathcal{U}_{Y,cof}$ le rispettive topologie cofinite.

Dimostrare che un'applicazione $f : (X,\mathcal{U}_{X,cof}) \longrightarrow (Y,\mathcal{U}_{Y,cof})$ e' continua se e solo se o f e' costante oppure, per ogni $y \in Im(f) \subseteq Y$, $f^{-1}(y)$ e' un insieme finito

2.12) Sia $f : (X,\mathcal{U}_X) \to (Y,\mathcal{U}_Y)$ una applicazione tra spazi topologici. Esibire un esempio per cui:

(a) f e' continua, aperta e chiusa;

(b) e' continua, non aperta e non chiusa

(c) non e' continua ma e' aperta ed e' chiusa

(d) e' continua, non e' aperta ma e' chiusa

(e) e' continua, e' aperta ma non e' chiusa.

2.13) Mostra che una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se verifica entrambe le seguenti proprietà:

a) f è biiettiva;

b) un sottoinsieme S è chiuso in X se e solo se $f(S)$ è chiuso in Y.