Geometria 3 a.a. 2019-20

Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini

Foglio n. 2 Esercizi - SVOLGIMENTI

[1]

2.1) In $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea, determina chiusura, interno e frontiera di $S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0\}$ (risp., di $S_2 = \{(x,0) | 0 \leq x \leq 1\}$ e di $S_3 = \{(x,y) | 0 < x, y \leq 1\}$).

2.2) Sia $(X, \mathcal{U})$ un qualsiasi spazio topologico e sia $Y \subset X$ un suo qualsiasi sottoinsieme. Dimostrare che

$$\overset{o}{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y}).$$

2.3) Sia (X, d) uno spazio metrico. Mostra che la chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme S è il sottoinsieme $\{x \in X \mid d(x,S) = 0\}$, ove con $d(x,S)$ si denoti la distanza di x da S, definita da

$$d(x,S) = inf\{d(x,s) | \, s \in S\}.$$

2.4) In un insieme infinito X considera la topologia $\mathcal{U}_{cof}$ dei cofiniti (gli aperti non vuoti sono, per definizione, i sottoinsieme con complementare finito).

i) Mostra che lo spazio topologico $(X, \mathcal{U}_{cof})$ non è metrizzabile.

ii) Mostra che ogni aperto non vuoto è denso in X.

iii) Supponi che $X = \mathbf{R}$. Determina chiusura, interno e frontiera di $[0,1]$ (e di $\{1\}$).

iv) Supponi che $X = \mathbf{R}$. Mostra che $\mathcal{U}_{cof} \subset \mathcal{U}_{eucl}$. (**VISTO A LEZIONE**)

2.5) Considera un sottoinsieme A di uno spazio topologico $(X, \mathcal{U})$. Mostra che

i) A e $X \setminus A$ hanno la stessa frontiera. (**VISTO A LEZIONE**)

ii) La frontiera di $\overline{A}$ è contenuta nella frontiera di A.

iii) L'interno $\mathring{A}$ di A coincide con il proprio interno (cioè l'interno dell'interno di A coincide con l'interno di A).

iv) La frontiera dell'interno $\mathring{A}$ di A è contenuta nella frontiera di A.

v) $\mathring{A}$, $(X \overset{o}{\setminus} A)$ e la frontiera di A sono sottoinsiemi a due a due disgiunti. La loro unione è X.

vi) Se A è denso, allora l'interno $(X \overset{o}{\setminus} A)$ del complementare di A è vuoto.

2.6) Mostra che un sottoinsieme di uno spazio topologico è la chiusura di un aperto se e solo se è la chiusura del proprio interno.

2.7) In uno spazio topologico, mostra che un sottoinsieme ha frontiera vuota se e solo se è sia aperto che chiuso.

2.8) In un insieme X sia assegnata una funzione $\begin{array}{rcl} g : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ S & \mapsto & g(S) \end{array}$ con le proprietà che

a) $g(\emptyset) = \emptyset$;

b) $S \subseteq g(S)$;

c) $g(g(S)) = g(S)$;

d) $g(S_1 \cup S_2) = g(S_1) \cup g(S_2)$

per ogni sottoinsieme S, S_1, S_2 di X. Mostra che esiste una unica topologia su X tale che $g(S)$ coincida con la chiusura di S per ogni sottoinsieme S di X.

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

2.9) Sia $f:(X,\mathcal{U}_X)\to(Y,\mathcal{U}_Y)$ una applicazione continua tra spazi topologici; mostra che, se $\mathcal{U}_Y^*$ è una topologia su Y meno fine di $\mathcal{U}_Y$, allora anche $f:(X,\mathcal{U}_X)\to(Y,\mathcal{U}_Y^*)$ è continua.

È vero che, se $\mathcal{U}_X^*$ è una topologia su X meno fine di $\mathcal{U}_X$, allora anche $f:(X,\mathcal{U}_X^*)\to(Y,\mathcal{U}_Y)$ è continua?

Deduci che l'applicazione identica $id_X(X,\mathcal{U})\to(X,\mathcal{U}')$ è continua se e solo se la topologia $\mathcal{U}'$ nel codominio è meno fine della topologia $\mathcal{U}$ nel dominio.

2.10) Siano X e Y insiemi non vuoti.

a) Su X è assegnata la topologia concreta $\mathcal{U}_X$. Su Y è assegnata la topologia cofinita $\mathcal{U}_{Y,cof}$. Mostra che le applicazioni continue $(X,\mathcal{U}_X)\to(Y,\mathcal{U}_{Y,cof})$ sono tutte e sole le applicazioni costanti.

b) Su X è assegnata la topologia discreta $\mathcal{U}_{X,discr}$. Su Y è assegnata una topologia $\mathcal{U}_Y$. Mostra che tutte le applicazioni $(X,\mathcal{U}_{X,discr})\to(Y,\mathcal{U}_Y)$ sono continue.

2.11) Siano X e Y insiemi infiniti e siano $\mathcal{U}_{X,cof}$ e $\mathcal{U}_{Y,cof}$ le rispettive topologie cofinite.

Dimostrare che un'applicazione $f:(X,\mathcal{U}_{X,cof})\longrightarrow(Y,\mathcal{U}_{Y,cof})$ e' continua se e solo se o f e' costante oppure, per ogni $y\in Im(f)\subseteq Y$, $f^{-1}(y)$ e' un insieme finito

2.12) Sia $f:(X,\mathcal{U}_X)\to(Y,\mathcal{U}_Y)$ una applicazione tra spazi topologici. Esibire un esempio per cui:

(a) f e' continua, aperta e chiusa;

(b) e' continua, non aperta e non chiusa

(c) non e' continua ma e' aperta ed e' chiusa

(d) e' continua, non e' aperta ma e' chiusa

(e) e' continua, e' aperta ma non e' chiusa.

2.13) Mostra che una applicazione $f:X\to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se verifica entrambe le seguenti proprietà:

a) f è biiettiva;

b) un sottoinsieme S è chiuso in X se e solo se $f(S)$ è chiuso in Y.

Soluzioni

2.1) • Consideriamo S_1.

Prima di tutto facciamo vedere che S_1 è aperto (e dunque coincide con il suo interno). Chiaramente, $\overset{o}{S}_1\subseteq S_1$, pertanto dobbiamo solo mostrare l'altra inclusione. Sia dunque $(x_0,y_0)\in S_1$. Allora $x_0>0$ e

$$B_{x_0}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<x_0^2\},$$

per definizione contiene (x_0,y_0) ed è interamente contenuto in S_1:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<x_0^2\Rightarrow\underbrace{-2x_0}_{<0}x+\underbrace{x^2+(y-y_0)^2}_{>0}<0\Rightarrow x>0.$$

Pertanto, ogni punto di S_1 e' interno a S_1, i.e. $S_1\subseteq\overset{o}{S}_1$, da cui $S_1=\overset{o}{S}_1$.

Facciamo ora vedere che $A:=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\mid x\geq 0\}$ è la chiusura di S_1.

Con argomento analogo a quello usato per mostrare che S_1 è aperto, facilmente si vede che il complementare di A è un aperto, e dunque A è chiuso che contiene S_1, cosi' $\overline{S}_1\subseteq A$.

Ora dobbiamo far vedere che A e' il piu' piccolo chiuso che contiene S_1. Per fare questo, facciamo vedere che tutti i punti di A sono di aderenza per S_1, cosicche' $A \subseteq \overline{S}_1$ ed avremo concluso per doppia inclusione.

Ovviamente $S_1 \subseteq \overline{S_1}$, i.e. i punti di S_1 sono aderenti a S_1. Consideriamo ora un punto $(0, y) \in A \setminus S_1$ e sia $\epsilon > 0$ un qualsiasi numero reale. Chiaramente $B_\epsilon((0, y)) \cap S_1 \neq \emptyset$ (contiene, ad esempio, il punto $(\frac{\epsilon}{2}, y) \in S_1$ in quanto $\epsilon > 0$).

Infine, per determinare la frontiera di S_1, ricordiamo che per ogni sottoinsieme B di uno spazio topologico X abbiamo $\partial B = \overline{B} \setminus \overset{o}{B}$. Allora nel nostro caso

$$\partial S_1 = \overline{S_1} \setminus S_1 = \{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\}.$$

- Per quanto riguarda S_2, notiamo che $\overline{S_2} = S_2$. Infatti

$$S_2 = Q_1 \cap K_1,$$

dove Q_1 e' il quadrato chiuso $[0, 1] \times [0, 1]$ e K_1 e' il chiuso dato da $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = 0\}$.

Il fatto che K_1 sia chiuso discende dai seguenti fatti:

$$\pi_y : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}, \ (x, y) \to y$$

e' continua, $K_1 = \pi_y^{-1}(0)$ e $\{0\}$ e' chiuso di $\mathbf{R}$ perche' Hausdorff.

Abbiamo inoltre $\overset{o}{S_2}= \emptyset$, visto che una base per gli aperti della topologia euclidea di $\mathbf{R}^2$ sono i dischi di centro dato e raggio positivo.

Pertanto $\partial(S_2) = S_2$.

- Infine

$$\overline{S_3} = \{(x, y)|0 \leq x, y \leq 1\}, \quad \overset{o}{S_3}= \{(x, y)|0 < x, y < 1\},$$
$$\partial(S_3) = \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\} \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ y \in \{0, 1\}\}$$

2.2) Per brevita', denotiamo $Y^c = X \setminus Y$.

Per ogni $Y \subseteq X$ si ha $Y^c \subseteq \overline{Y^c}$ e dunque $\overline{Y^c}^c \subseteq Y$. Ma $\overline{Y^c}^c$ e' un aperto, visto che e' complementare del chiuso $\overline{Y^c}$, contenuto in Y. Pertanto $\overline{Y^c}^c \subseteq \overset{o}{Y}$.

D'altra parte, $\overset{o}{Y} \subseteq Y$, pertanto $Y^c \subseteq \overset{o}{Y}{}^c$, dove $\overset{o}{Y}{}^c$ e' un chiuso complementare dell'aperto $\overset{o}{Y}$. Quindi $\overline{Y^c} \subseteq \overset{o}{Y}{}^c$ e dunque $\overset{o}{Y} \subseteq \overline{Y^c}^c$.

2.3) Denotiamo $A := \{x \in X \mid d(x, S) = 0\}$.

Sia $x \in \overline{S}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $y \in B_\varepsilon(x)$ tale che $y \in S$ e dunque $d(x, S) \leq d(x, y) < \varepsilon$. Poiché ε può essere piccolo a piacere ne deduciamo $d(x, S) = 0$ e dunque $x \in A$.

Sia $x \notin \overline{S}$; pertanto x non e' aderente a S. Esiste dunque un $\epsilon > 0$ reale per cui $B_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$. Ma allora $d(x, S) \geq \epsilon > 0$: Dunque $x \notin A$.

2.4) i) Ricordiamo che a lezione avete visto che se consideriamo uno spazio metrico con la topologia indotta dalla distanza, allora esso è uno spazio di Hausdorff (ovvero uno spazio tale che per ogni coppia x, Y di punti distinti esistono aperti U_X e U_y tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$).

Questo non è il caso della topologia $\mathcal{U}_{cof}$: consideriamo due punti distinti $x, y \in X$ e supponiamo che $U, V \in \mathcal{U}_{cof}$ con $x \in U$ e $y \in V$ siano tali che $U \cap V = \emptyset$. Per definizione di topologia cofinita, esistono due insiemi finiti $S_1, S_2 \subseteq X$ tali che $U = X \setminus S_1$ e $V = X \setminus S_2$ e quindi

$$X = X \setminus (U \cap V) = X \setminus ((X \setminus S_1) \cap (X \setminus \cap S_2)) = S_1 \cup S_2,$$

ma questo è un assurdo poiché l'insieme a destra ha un numero finito di elementi.

ii) Sia $U \subseteq X$ aperto. Allora esiste un insieme finito $S_1 \subset X$ tale che $U = X \setminus S_1$. Ora $x \in X$ è un punto di chiusura di U se e solo se per ogni aperto $V \subseteq X$ con $x \in V$ vale $U \cap V \neq \emptyset$. Poiché V è aperto, esiste un insieme finito $S_2 \subset X$ tale che $V = X \setminus S_2$. Allora $X \setminus (V \cap U)$ per lo stesso ragionamento del punto precedente ha un numero finito di elementi e quindi $\#(U \cap V) = \infty$ e dunque non è vuoto.

iii) Un punto di chiusura di $[1,0]$ è un $x \in \mathbf{R}$ tale che per ogni insieme finito $S \subseteq \mathbf{R}$ che non lo contiene vale $(\mathbf{R} \setminus S) \cap [0,1] \neq \emptyset$. Vediamo che questo vale per ogni numero reale e concludiamo $\overline{[0,1]} = \mathbf{R}$. L'interno è vuoto poiché $[1,0]$ non contiene sottoinsiemi aperti. Ne segue che la frontiera di $[1,0]$ è l'intera retta reale.

L'insieme $\{1\}$ è finito e dunque è chiuso e coincide con la sua chiusura. L'interno è vuoto poiché non vi è nessun aperto in $\{1\}$ e dunque tanto meno un aperto contenente 1. Ne deduciamo che la frontiera è $\partial\{1\} = \overline{\{1\}} \setminus \overset{o}{\{1\}} = \{1\}$.

(iv) Sia $U \in \mathcal{U}_{cof}$. Allora esiste un insieme finito $S \subseteq \mathbf{R}$ tale che $U = \mathbf{R} \setminus S$. Ora notiamo che un punto x è chiuso in una topologia indotta da una metrica d su X (quindi in particolare quella euclidea): se r ed $x_0 \in X$ sono tali che $x \in B_r(x_0)$ allora banalmente $B_r(x_0) \cap \{x\} \neq \emptyset$. Poiché l'unione finita di chiusi è un chiuso, ne deduciamo che $\mathbf{R} \setminus S$ è aperto in $\mathcal{U}_{eucl}$.

2.5) A lezione abbiamo definito $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ e poi abbiamo dimostrato l'equivalenza con $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

i) Dalla definizione data a lezione $\partial(X \setminus A) = \partial A$

ii) $\partial\overline{A} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{(X \setminus \overline{A})} = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus \overline{A})}$. Ora la tesi segue poiché se $B \subseteq C$ allora $\overline{B} \subseteq \overline{C}$. Pertanto, dato che $A \subseteq \overline{A}$ e dunque $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$, abbiamo

$$\partial\overline{A} = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus \overline{A})} \subseteq \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \partial A.$$

(iii) Ricordiamo che un insieme coi' $B_{\frac{\delta}{2}}((0,y))$ e aperto. Poiché l'interno di un insieme è aperto deve valere $\mathring{A} = \overset{o}{\mathring{A}}$.

(iv) Nel punto precedente abbiamo dimostrato che $\overset{o}{\mathring{A}} = \mathring{A}$. Allora, poiché $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A}$, otteniamo

$$\partial\mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \setminus \overset{o}{\mathring{A}} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \subseteq \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A.$$

(v)

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) \quad \Rightarrow \quad \partial A \cap \mathring{A} = (\overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A})) \cap \mathring{A} = \emptyset,$$

$$(X \overset{o}{\setminus} A) \subseteq X \setminus A, \ \mathring{A} \subseteq A \quad \Rightarrow \quad (X \overset{o}{\setminus} A) \cap \mathring{A} \subseteq (X \setminus A) \cap A = \emptyset.$$

Per dimostrare che $\partial A \cap (X \overset{o}{\setminus} A) = \emptyset$ dimostriamo che $\overline{A} \cap X \overset{o}{\setminus} A = \emptyset$. Sia $x \in X \overset{o}{\setminus} A$, allora esiste un U aperto tale che $x \in U \subseteq X \setminus A$, ma allora $U \cap A = \emptyset$ e quindi $x \notin \overline{A}$, da cui la tesi.

Infine, $X = (X \setminus A) \cup A = \overline{(X \setminus A)} \cup \overline{A} = (X \overset{o}{\setminus} A) \cup \partial(X \setminus A) \cup \partial A \cup \mathring{A} = (X \overset{o}{\setminus} A) \cup \partial A \cup \mathring{A}$ (dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il punto (i) di questo esercizio).

2.6) ($\Rightarrow$) Supponiamo che vi sia un aperto $U \in \mathcal{U}$ tale che $A = \overline{U}$. Allora poiché $U \subset A$ ed U è aperto per ipotesi, abbiamo che $U \subseteq \mathring{A}$. Prendendo le chiusure otteniamo $\overline{U} \subseteq \overline{\mathring{A}}$, cioè $A \subseteq \overline{\mathring{A}}$. D'altronde, $\mathring{A} \subseteq A$ e quindi $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A} = A$.

($\Leftarrow$) Questa implicazione è ovvia, poiché per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ il suo interno $\overset{o}{A}$ è per definizione un aperto della topologia e pertanto $\overline{\overset{o}{A}} = A$ è banalmente la chiusura di un aperto.

2.7) ($\Rightarrow$) Per ipotesi abbiamo $\emptyset = \partial S = \overline{S} \setminus \overset{o}{S}$, da cui $\overline{S} = \overset{o}{S}$. Inoltre, per definizione $\overset{o}{S} \subseteq S \subseteq \overline{S}$. Ne deduciamo che $\overset{o}{S} = S = \overline{S}$ e quindi S è sia chiuso che aperto.

($\Leftarrow$) Supponiamo che $S \subseteq X$ sia sia aperto che chiuso. Allora poiché S è chiuso, coincide con la chiusura. D'altronde, essendo S aperto coincide anche con il suo interno. Ma allora $\partial S = \overline{S} \setminus \overset{o}{S} = S \setminus S = \emptyset$.

2.8) Si consideri l'insieme

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X \mid g(C) = C\}.$$

Verifichiamo che i suoi elementi soddisfano gli assiomi dei chiusi $\mathcal{C}$ di una topologia su X, ovvero

(CH1) $X,\ \emptyset \in \mathcal{C}$;

(CH2) se $A_i \in \mathcal{C}$ per ogni $i \in I$, allora $\bigcap_i A_i \in \mathcal{C}$;

(CH3) se $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{C}$, allora $A_1 \cup \ldots \cup A_r \in \mathcal{C}$.

(CH1) vale poiché per (b) $X \subseteq g(X)$, da cui $g(X) = X$, e inoltre $g(\emptyset) = \emptyset$ per (a).

Siano ora $C_i \in \mathcal{G}$ per $i \in I$. Per dimostrare che (CH2) è soddisfatto notiamo che per (b) vale $\bigcap_i C_i \subseteq g\left(\bigcap_i C_i\right)$, quindi dobbiamo solo dimostrare l'inclusione opposta. Per farlo osserviamo che per ogni $j \in I$ vale $C_j = C_j \cup \bigcap_i C_i$ e quindi per (d) abbiamo $g(C_j) = g(C_j) \cup g(\bigcap_i C_i)$, ma poiché $C_j \in \mathcal{G}$, vale $C_j = C_j \cup g(\bigcap_i C_i)$, da cui $g(\bigcap_i C_i) \subseteq C_j$. Poiché questo vale per ogni $j \in I$, ne segue $g(\bigcap_i C_i) \subseteq \bigcap C_j$.

Infine, (CH3) segue rapidamente da (d) per induzione su r.

Questa scelta di chiusi induce univocamente una struttura di spazio topologico su X, che è l'unica topologia possibile tale che $g(S)$ coincida con la chiusura di S per ogni $S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

2.9) Ricordiamo che una topologia $\mathcal{U}_Y^*$ su Y è detta meno fine di un'altra topologia $\mathcal{U}_Y$ su Y se $\mathcal{U}_Y^* \subseteq \mathcal{U}_Y$.

Ricordiamo inoltre che $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (Y, \mathcal{U}_Y)$ è detta continua se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ vale che $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$.

Pertanto se f è continua e $\mathcal{U}_Y^* \subseteq \mathcal{U}_Y$, allora per ogni $U \in \mathcal{U}_Y^* \subseteq \mathcal{U}_Y$ vale $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$.

Se f è continua e $\mathcal{U}_X^*$ è meno fine di $\mathcal{U}_X$, allora non necessariamente $f : (X, \mathcal{U}_X^*) \to (Y, \mathcal{U}_Y)$ è continua: basti pensare, ad esempio, all'identità

$$\mathrm{id} : (X, \mathcal{U}_X) \to (X, \mathcal{U}_X)$$

che è chiaramente continua, ma se $\mathcal{U}_X^*$ è strettamente contenuto in $\mathcal{U}_X$ vi sarà un aperto $U \in \mathcal{U}_X \setminus \mathcal{U}_X^*$ con $\mathrm{id}^{-1}(U) = U \notin \mathcal{U}_X^*$ e dunque la funzione

$$\mathrm{id} : (X, \mathcal{U}_X^*) \to (X, \mathcal{U}_X)$$

non è continua.

L'applicazione $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{U}')$ è continua se e solo se per ogni aperto $U \in \mathcal{U}'$ vale $(\mathrm{id}_X)^{-1}(U) = U \in\subseteq \mathcal{U}$, ovvero $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

2.10) a) Ricordiamo che la topologia concreta (o banale) su X è la topologia definita come $\mathcal{U}_X = \{\emptyset, X\}$. Notiamo che gli unici chiusi di X sono dunque X e $\emptyset$.

Consideriamo una funzione costante $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (Y, \mathcal{U}_{Y,cof})$, ovvero tale che esiste un $\overline{y} \in Y$ con $f(x) = \overline{y}$ per ogni $x \in X$. Vogliamo mostrare che è continua. Sia dunque $U \in \mathcal{U}_{Y,cof}$, allora esiste un $S \subseteq Y$ con $\#S < \infty$ e $U = Y \setminus S$. Osserviamo che se $\overline{y} \in S$ allora $\overline{y} \notin U$ e quindi $f^{-1}(U) = \emptyset$, mentre se $\overline{y} \notin S$ abbiamo $f^{-1}(U) = X$. Vediamo che una funzione costante è sempre continua, indipendentemente dalle topologie di cui gli spazi sono dotati.

Viceversa, supponiamo che $f : (X,\mathcal{U}_X) \to (Y,\mathcal{U}_{Y,cof})$ sia continua. Utilizziamo la caratterizzazione di funzioni continue in termini dei chiusi: f continua se e solo se la preimmagine di ogni chiuso è chiusa a sua volta. Sia $y \in Y$. Allora $\{y\} \in \mathcal{U}_{Y,cof}$ e $f^1(\{y\}) = X$ o $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Chiaramente, $f^{-1}(\{y\}) = X$ significa che $f(x) = y$ per ogni $x \in X$ e pertanto può avvenire per al più un y. Inoltre è evidente che non possa essere meno di uno, altrimenti l'immagine sarebbe vuota, mentre $\#Y \geq 1$.

b)Sia $f : (X,\mathcal{U}_{X,discr}) \to (Y,\mathcal{U}_Y)$ una funzione. Osserviamo che ogni sottoinsieme di X è aperto, poiché per definizione di topologia discreta ogni punto è aperto e unioni arbitrarie di aperti sono aperte. Questa osservazione è ciò che ci serve per concludere: sia $U \in \mathcal{U}_Y$ allora banalmente $f^{-1}(U) \subseteq X$ e per quanto osservato è aperto.

2.11) ($\Leftarrow$) Se f e' costante abbiamo visto nell'esercizio precedente che essa e' sempre continua.

Sia dunque f non costante. Un qualsiasi chiuso di Y e' della forma $C = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Se $y_i \notin Im(f)$ allora $f^{-1}(y_i) = \emptyset$ che e' chiuso in X; se invece $y_i \in Im(f)$ allora per ipotesi $f^{-1}(y_i)$ e' un insieme finito di X, quindi chiuso di X.

Poiche' ogni chiuso C di Y e' costituito da un numero finito di punti, e poiche' l'unione di un numero finito di chiusi di X e' un chiuso di X, si ha che f e' continua in ogni caso.

($\Rightarrow$) Sia $y \in Im(f) \subseteq Y$; allora $\{y\}$ e' un chiuso di Y. Poiche' f e' continua, allora $f^{-1}(y)$ e' un chiuso di X.

Se $f^{-1}(y)$ e' un insieme infinito, essendo chiuso in X, allora necessariamente $f^{-1}(y) = X$ e dunque f e' necessariamente costante.

Se invece f e' non costante, per ogni $y \in Im(f)$ si deve avere che $f^{-1}(y)$ e' un insieme finito, per la continuita' di f.

2.12) (a) Si consideri $X = Y = \mathbf{R}$ e $\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \mathcal{U}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ e basta prendere $f = id_{\mathbf{R}}$ oppure $f(x) = x^3$

(b) Si consideri $X = Y = \mathbf{R}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \mathcal{U}_{\text{Eucl}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{U}_{\text{Cof}}$ e basta prendere $f = id_{\mathbf{R}}$.

(c) Si consideri $X = Y = \mathbf{R}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{U}_{\text{Eucl}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \mathcal{U}_{\text{Cof}}$ e basta prendere $f = id_{\mathbf{R}}$.

(d) Si consideri $X = Y = \mathbf{R}$ e $\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \mathcal{U}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ e basta prendereuna qualsiasi applicazione costante $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(e) Si consideri $X = \mathbf{R}^2$, $Y = \mathbf{R}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,\text{Eucl}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{U}_{\mathbf{R},\text{Eucl}}$ e prendiamo

$$f = \pi_x : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \ \ (x, y) \to x$$

la proiezione sulla prima coordinata.

f e' continua, visto che $f^{-1}(a, b) = (a, b) \times \mathbf{R}$ che e' manifestamente aperto in $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,\text{Eucl}})$ come si puo' dimostrare similmente a quanto fatto nell'esercizio 1 per S_1.

Gli aperti di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,\text{Eucl}})$ sono unioni di dischi aperti della forma $B_\epsilon((x_0, y_0))$. Osserviamo ora che

$$f(B_\epsilon((x_0, y_0))) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon).$$

Poiche' l'unione di aperti e' un aperto, si ha dunque che f e' aperta.

Dimostriamo che f non e' chiusa. Dobbiamo esibire un chiuso di $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,\text{Eucl}})$ che non si proietta su un chiuso di $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{\mathbf{R},\text{Eucl}})$. Consideriamo la funzione $g(x, y) := xy - 1$; essa e' continua da $(\mathbf{R}^2,\mathcal{U}_{\mathbf{R}^2,\text{Eucl}})$ a $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{\mathbf{R},\text{Eucl}})$ perche' polinomiale. Sia $K := g^{-1}(0) \subset \mathbf{R}^2$; insiemisticamente K e' liperbole equilatera nel piano cartesiano. Poiche' $Y = \mathbf{R}$ con topologia euclidea e' Hausdorff, $\{0\}$ e' un chiuso di Y e duinque, per la continuita' di g, K e' un chiuso di $X = \mathbf{R}^2$ con la sua topologia euclidea. Proiettando K sull'asse delle ascisse si ottiene

$$\pi_x(K) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

che e' un aperto ma non un chiuso nella topologia euclidea di $Y = \mathbf{R}$.

2.13) Ricordiamo che una funzione f tra due spazi topologici è un omeomorfismo se è una funzione continua con inversa continua.

($\Rightarrow$) Sia f un omeomorfismo. Poiché deve ammettere inversa, a livello insiemistico deve essere invertibile e deve dunque essere biettiva, da cui a). Inoltre, poiché f^{-1} è continua, se $S \subseteq X$ è chiuso $(f^{-1})^{-1}(S) = f(S)$ deve essere chiuso. D'altronde, se $f(S)$ è chiuso dalla continuità di f segue che $f^{-1}(f(S)) = S$ è chiuso. Abbiamo dunque dimostrato che vale anche b).

($\Leftarrow$) Se f è biunivoca, ne esiste un'inversa (a livello insiemistico). Dobbiamo ora usare b) per far vedere la continuità di f ed f^{-1}. Sia $A \subseteq Y$ un chiuso. Allora $A = f(f^{-1}(A))$ e questo per b) implica che $f^{-1}(A)$ sia a sua volta chiuso, ovvero che f è continua. Sia ora $S \subseteq X$ chiuso. Allora $(f^{-1})^{-1}(S) = f(S)$ è chiuso per b), da cui segue che f^{-1} è anch'essa continua.