Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Laurea Triennale in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 1 Esercizi

[1]

1.1) Siano X un insieme e $d : X \times X \to \mathbf{R}$ una funzione assegnata. Mostra che la funzione d è una distanza su X se e solo se valgono le proprietà:
i) per ogni $x, y \in X$: $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) + d(x, z) \geq d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

1.2) a) Verifica che $d_1 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

è una distanza.
b) Disegna $B_1^{d_1}(\vec{0})$ per $n = 1$ e $n = 2$.

1.3) Stesse domande dell'esercizio precedente, con $d_2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) := max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n.$$

1.4) Verifica che le metriche d_1 e d_2 degli esercizi precedenti sono metriche topologicamente equivalenti. Verificare inoltre che esse sono entrambe equivalenti alla metrica euclidea su $\mathbf{R}^n$

1.5) a) Controlla se $d(x, y) := (x - y)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ è una metrica su $\mathbb{R}$.
b) Controlla se $d(\vec{x}, \vec{y}) := min_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ e' una metrica su $\mathbb{R}^n$.

1.6) Considera uno spazio metrico (X, d). Controlla se le seguenti funzioni sono distanze su X:
a) fissato $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $d_r(x, y) := rd(x, y)$, $\forall x, y \in X$.
b) $d''(x, y) := min\{d(x, y), 1\}$, $\forall x, y \in X$.
In caso di risposta affermativa, verifica che sono metriche topologicamente equivalenti alla metrica d.

1.7) Considera lo spazio metrico $\mathbf{R}$ con metrica euclidea. Mostra che, per ogni $a \in \mathbf{R}$, le semirette $(-\infty, a)$ e $(a, +\infty)$ sono aperte.

1.8) a) (X, d) spazio metrico discreto. Mostra che ogni sottoinsieme di X è aperto. (svolto a lezione)
b) X insieme finito, d metrica su X. Mostra che ogni sottoinsieme di X è aperto (e dunque d ha gli stessi aperti della metrica discreta).

1.9) (X, d), (Y, d_Y) spazi metrici.
(a) Posto $d' := \frac{d}{1+d}$, mostra che d' è una distanza su X. (svolto a lezione)
(b) Mostra che una funzione $f : X \to (Y, d_Y)$ è continua rispetto a d se e solo se è continua rispetto a d'.
(c) Mostra che d' è infatti topologicamente equivalente a d.

1.10) Siano assegnate due topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ in un insieme X. Mostra che risulta essere una topologia anche la famiglia $\mathcal{U} \overset{def}{=} \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ dei sottoinsiemi U di X che sono elementi sia di $\mathcal{U}_1$ che di $\mathcal{U}_2$.

1.11) Siano $(X, \mathcal{U})$ uno spazio topologico e $A, B \subseteq X$ sottoinsiemi. Mostra che
i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
ii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. (Descrivi un esempio nel quale l'inclusione è propria)
iii) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.
iv) $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B)$. (Descrivi un esempio nel quale l'inclusione è propria)

[1] Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo