Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Laurea Triennale in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini

Foglio Esercizi 1 (con Svolgimenti)

[1]

1.1) Siano X un insieme e $d : X \times X \to \mathbf{R}$ una funzione assegnata. Mostra che la funzione d è una distanza su X se e solo se valgono le proprietà:
i) per ogni $x, y \in X$: $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) + d(x, z) \geq d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

1.2) a) Verifica che $d_1 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

è una distanza.
b) Disegna $B_1^{d_1}(\vec{0})$ per $n = 1$ e $n = 2$.

1.3) Stesse domande dell'esercizio precedente, con $d_2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) := max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n.$$

1.4) Verifica che le metriche d_1 e d_2 degli esercizi precedenti sono metriche topologicamente equivalenti. Verificare inoltre che esse sono entrambe equivalenti alla metrica euclidea su $\mathbf{R}^n$

1.5) a) Controlla se $d(x, y) := (x - y)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ è una metrica su $\mathbb{R}$.
b) Controlla se $d(\vec{x}, \vec{y}) := min_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ e' una metrica su $\mathbb{R}^n$.

1.6) Considera uno spazio metrico (X, d). Controlla se le seguenti funzioni sono distanze su X:
a) fissato $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $d_r(x, y) := rd(x, y)$, $\forall x, y \in X$.
b) $d''(x, y) := min\{d(x, y), 1\}$, $\forall x, y \in X$.
In caso di risposta affermativa, verifica che sono metriche topologicamente equivalenti alla metrica d.

1.7) Considera lo spazio metrico $\mathbf{R}$ con metrica euclidea. Mostra che, per ogni $a \in \mathbf{R}$, le semirette $(-\infty, a)$ e $(a, +\infty)$ sono aperte.

1.8) a) (X, d) spazio metrico discreto. Mostra che ogni sottoinsieme di X è aperto. (svolto a lezione)
b) X insieme finito, d metrica su X. Mostra che ogni sottoinsieme di X è aperto (e dunque d ha gli stessi aperti della metrica discreta).

1.9) (X, d), (Y, d_Y) spazi metrici.
(a) Posto $d' := \frac{d}{1+d}$, mostra che d' è una distanza su X. (svolto a lezione)
(b) Mostra che una funzione $f : X \to (Y, d_Y)$ è continua rispetto a d se e solo se è continua rispetto a d'.
(c) Mostra che d' è infatti topologicamente equivalente a d.

1.10) Siano assegnate due topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ in un insieme X. Mostra che risulta essere una topologia anche la famiglia $\mathcal{U} \overset{def}{=} \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ dei sottoinsiemi U di X che sono elementi sia di $\mathcal{U}_1$ che di $\mathcal{U}_2$.

1.11) Siano $(X, \mathcal{U})$ uno spazio topologico e $A, B \subseteq X$ sottoinsiemi. Mostra che
i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
ii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. (Descrivi un esempio nel quale l'inclusione è propria)
iii) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

[1]La stesura in latex di alcune parti del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

iv) $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B)$. (Descrivi un esempio nel quale l'inclusione è propria)

Soluzioni

1.1) Ricordiamo che una distanza (o metrica) d su un insieme X è una funzione $d : X \times X \to \mathbf{R}$ tale che

(D1) $d(u, v) \geq 0$ per ogni coppia $u, v \in X$, dove l'uguaglianza $d(u, v) = 0$ vale se e solo se $u = v$;
(D2) (simmetria) $d(u, v) = d(v, u)$ per ogni $u, v \in X$;
(D3) (disuguaglianza triangolare) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ per ogni $u, v, w \in X$.

($\Rightarrow$) Assumiamo che d sia una distanza su X, allora per (D1) vale (i). Inoltre per (D3) (con $u = y$, $v = x$, $w = z$) vale

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \tag{1}$$

e per (D2) $d(y, x) = d(x, y)$, pertanto (1) diventa la disuguaglianza in (ii).

($\Leftarrow$) Assumiamo ora che valgano (i) e (ii). Da (ii) con $x = u$ e $y = z = v$ segue che

$$d(u, v) + d(u, v) \geq d(y, y)$$

ma per (i) $d(y, y) = 0$ e pertanto abbiamo $2d(u, v) \geq 0$, che è equivalente a $d(u, v) \geq 0$ ed (i) ci dice che vale l'uguaglianza se e solo se $u = v$. Questo fornisce (D1).

La simmetria si ottiene da due applicazioni di (ii) ed (i):

$$d(u, v) + \underbrace{d(u, u)}_{\overset{(i)}{=}0} \geq d(v, u), \quad ((\text{ii}) \text{ con } x = u, y = v, z = u)$$
$$d(v, u) + \underbrace{d(v, v)}_{\overset{(i)}{=}0} \geq d(u, v), \quad ((\text{ii}) \text{ con } x = v, y = u, z = v)$$

e quindi $d(u, v) = d(v, u)$.

Infine, la disuguaglianza triangolare si ottiene applicando la simmetria ($d(y, x) = d(x, y)$), che abbiamo già dimostrato, a (ii) (con $u = y$, $v = x$, $w = z$).

1.2) Per l'esercizio precedente, è sufficiente verificare le proprietà (i) e (ii).

(i): Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$. Allora $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ se e solo se $\sum_i |x_i - y_i| = 0$, ma questo avviene se e solo se $[x_i - y_i| = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ (poiché stiamo sommando quantità non negative ed otteniamo 0), che è equivalente a $\vec{x} = \vec{y}$, come desiderato.

(ii): Siano $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n$, allora

$$\begin{aligned} d_1(\vec{y}, \vec{z}) &= \sum |y_i - z_i| = \sum |y_i - x_i + x_i - z_i| \\ &\leq \left(\sum |y_i - x_i|\right) + \left(\sum |x_i - z_i|\right) \\ &\leq \left(\sum |x_i - y_i|\right) + \left(\sum |x_i - z_i|\right) \\ &= d_1(\vec{x}, \vec{y}) + d_1(\vec{x}, \vec{z}). \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che se (X, d) è uno spazio metrico, allora il disco $B_r^d(x_0)$ di centro $x_0 \in X$ e raggio $r \in \mathbf{R}_{>0}$ è definito come segue

$$B_r^d(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Nel nostro caso, per $n = 1$ abbiamo

$$B_1^{d_1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}.$$

Per $n = 2$ otteniamo invece

$$\begin{aligned} B_1^{d_1}((0, 0)) &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 1 < y < x + 1 \wedge -x - 1 < y < -x + 1\} \end{aligned}$$

che è un rombo in $\mathbf{R}^2$.

1.3) Per il primo esercizio, è sufficiente verificare le proprietà (i) e (ii).

(i): Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$. Allora $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ se e solo se $\max_i |x_i - y_i| = 0$, ma questo avviene se e solo se $[x_i - y_i| = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ (poiché $|x_i - y_i| \geq 0$ e $|x_i - y_i| \leq \max_i |x_i - y_i|$), che è equivalente a $\vec{x} = \vec{y}$, come desiderato.

(ii): Siano $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n$, allora se j è tale che $|z_j - y_j| = \max |z_i - y_i|$, abbiamo

$$\begin{aligned} d_2(\vec{y}, \vec{z}) &= \max_i |y_i - z_i| = |y_j - z_j| = |y_j - x_j + x_j - z_j| \\ &\leq |y_j - x_j| + |x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |x_j - z_j| \leq (\max |x_i - y_i|) + (\max |x_i - z_i|) \\ &= d_2(\vec{x}, \vec{y}) + d_2(\vec{x}, \vec{z}). \end{aligned}$$

In questo caso, per $n = 1$ abbiamo nuovamente

$$B_1^{d_2}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}.$$

Per $n = 2$ otteniamo invece

$$\begin{aligned} B_1^{d_2}((0,0)) &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < y < +1 \wedge -1 < x < +1\} \end{aligned}$$

che è un quadrato in $\mathbf{R}^2$.

1.4) Per come sono definite d_1 e d_2 si ha che, per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$, vale

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant d_1(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant n d_2(\vec{x}, \vec{y})$$

che implica che d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti. Infatti, per ogni $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $\epsilon > 0$ reale questo vuol dire

$$B_\epsilon^{d_1}(\vec{x}) \subseteq B_\epsilon^{d_2}(\vec{x}) \subset B_{n\epsilon}^{d_1}(\vec{x}).$$

Se d denota la metrica euclidea, analogamente a prima si ha che per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$, vale

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant d(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \sqrt{n} d_2(\vec{x}, \vec{y})$$

che implica che d e d_2 sono topologicamente equivalenti. Essendo d_2 topologicamente equivalente a d_1, allora d e' anche topologicamente equivalente a d_1.

1.5) (a) $d(x, y)$ non e' una metrica su $\mathbb{R}$ perche' non soddisfa la diseguaglianza triangolare (ii)
(b) $d(\vec{x}, \vec{y})$ non e' una metrica su $\mathbb{R}^n$ perche' $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ non implica $\vec{x} = \vec{y}$.

1.6) Dal primo esercizio, nuovamente, verifichiamo (i) e (ii) per a) e b) assumendo che esse valgano per la funzione d.

a)(i): siano $x, y \in X$. Allora

$$d_r(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; r d(x, y) = 0 \;\overset{r \neq 0}{\Leftrightarrow}\; d(x, y) = 0 \;\overset{(i)}{\Leftrightarrow}\; x = y.$$

a)(ii): siano $x, y, z \in X$. Allora

$$d_r(z, y) = r d(z, y) \leq r(d(x, y) + d(x, z)) = r d(x, y) + r d(x, z) = d_r(x, y) + d_r(x, z).$$

Concludiamo che d_r è una metrica su X.

b)(i): siano $x, y \in X$. Allora

$$d''(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow \min\{d(x, y), 1\} = 0 \;\Leftrightarrow d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow x = y.$$

b)(ii) siano $x, y, z \in X$. Notiamo che se entrambi $d(x, y), d(x, z) < 1$ allora (ii) segue immediatamente poiché in questo caso

$$d''(z, y) \leq d(z, y) \leq d(x, y) + d(x, z) = d''(x, y) + d''(x, z).$$

Se invece almeno uno tra $d(x, y)$ e $d(x, z)$ è ≥ 1, allora $d''(x, y) + d''(x, z) \geq 1$ e (ii) è verificata poiché

$$d''(z, y) \leq 1 \leq d''(x, y) + d''(x, z).$$

Concludiamo che anche d'' è una metrica su X.

Per dimostrare che d_r e' topologicamente equivalente a d consideriamo i due sottocasi:
Se $r \geqslant 1$ allora si ha $\frac{1}{r} d_r \leqslant d \leqslant d_r$
Se $0 < r < 1$ si ha $r d \leqslant d_r < d$

Pertanto, in ogni caso, per ogni $x \in X$ e per ogni $\epsilon > 0$ reale si ha $B_\epsilon^{d_r}(x) = B^d_{\frac{\epsilon}{r}}(x)$.

Per d" abbiamo che

• se $\epsilon > 1$ reale, allora $B_\epsilon^{d"}(x) = X$, e X contiene $B_\epsilon^d(x)$, ed inoltre $B_1^{d"}(x) \subseteq B_\epsilon^d(x)$, per ogni $x \in X$

• se $0 < \epsilon \leqslant 1$ reale, allora $B_\epsilon^{d"}(x) = B_\epsilon^d(x)$, per ogni $x \in X$.

1.7) Ricordiamo che se (X, d) è uno spazio metrico, allora un sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice aperto se per ogni $x \in X$ esiste un $\varepsilon_x > 0$ tale che se $y \in X$ e $d(x, y) < \varepsilon_x$, allora $y \in U$.

L'esercizio ci chiede di dimostrare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ le semirette $(-\infty, a)$ e (a, ∞) sono aperti di $\mathbf{R}$ con metrica euclidea (cioè $d(x, y) = |x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$).

Notiamo prima di tutto che $x \in (-\infty, a)$ se e solo se $d(x, a) = |a - x| = a - x$. Sia dunque $x \in (-\infty, a)$, facciamo vedere che possiamo prendere $\varepsilon_x = a - x$. Sia $y \in \mathbf{R}$ e supponiamo $d(y, x) < a - x$. Ne segue che $|x - y| < a - y + y - x$, e quindi $|x - y| + x - y < a - y$. Poiché $|x - y| + x - y \geq 0$ otteniamo $a - y > 0$ e pertanto $d(y, a) = a - y$, da cui $y \in U$.

Il fatto che (a, ∞) sia aperto si dimostra in modo analogo, prendendo nuovamente $\varepsilon_x = d(x, a)$ e notando che $x \in (a, \infty)$ se e solo se $d(x, a) = x - a$.

1.8) a) Ricordiamo che la metrica discreta d su X è definita come

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $U \subseteq X$ un qualunque sottoinsieme e sia $x \in U$. Se poniamo $\varepsilon_x = \frac{1}{2}$, allora se $y \in X$ soddisfa $d(x, y) < \frac{1}{2}$ deve valere $y = x$. Concludiamo che U è aperto.

b) Sia ora (X, d) uno spazio metrico tale che $\#X < \infty$. Se U è un sottoinsieme qualunque e $x \in U$, poniamo $\varepsilon_x = \min\{d(x, y) \mid y \in X\}$. Come nel punto precedente se $x \in U$ e $y \in X$ è un elemento che verifica $d(x, y) < \varepsilon_x$ allora $x = y$ e quindi U è aperto.

1.9) Per dimostrare che d' è una distanza su X basta verificare (i) e (ii) del primo esercizio.

Usando il fatto che d è una distanza su X si ha

$$d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Per dimostrare (ii) poniamo $a = d(x, y)$ e $b = d(x, z)$ e consideriamo la funzione

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0} \xrightarrow{h} \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ t \to h(t) := \frac{t}{1 + t}.$$

Essa e' monotona sterttamente crescente, inoltre d' e' la composizione di h dopo d, i.e.

$$d' = h \circ d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Con conti elementari si verifica che

$$h(a) + h(b) \geqslant h(a + b).$$

Poich'e d e' una distanza, $a + b \geqslant d(y, z)$ e dunquen dalla monotonia di h si ha

$$h(a + b) \geqslant h(d(y, z)).$$

Pertanto si ottiene

$$h(a) + h(b) \geqslant h(a + b) \geqslant h(d(y, z))$$

che fornisce

$$d'(x, y) + d'(x, z) \geqslant d'(y, z).$$

Questo dimostra che d' e' una distanza.

Passiamo al secondo quesito:

($\Rightarrow$) Assumiamo che $f : (X, d) \to (Y, d_Y)$ sia continua. Allora

(2) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{ tale che } d(x, y) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Dal fatto che h e' strettamente crescente si ha che che per ogni $a, b \geqslant 0$ vale

(3) $$a < b \ \Leftrightarrow\ \frac{a}{1 + a} < \frac{b}{1 + b}.$$

Allora vediamo che possiamo definire $\delta'_\varepsilon := \frac{\delta_\varepsilon}{1+\delta_\varepsilon}$ ed otteniamo

$$d'(x,y) < \delta'_\varepsilon \overset{(3)}{\Rightarrow} d(x,y) < \delta_\varepsilon \overset{(4)}{\Rightarrow} d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Abbiamo dunque fatto vedere che $f : (X, d') \to (Y, d_Y)$ è continua.

($\Leftarrow$) Viceversa, assumiamo che $f : (X, d') \to (Y, d_Y)$ sia continua. Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{ tale che } d'(x,y) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Ora notiamo che $d'(x,y) < d(x,y)$ pertanto

$$d(x,y) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d'(x,y) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Questo ci fornisce la continuità di $f : (X, d) \to (Y, d_Y)$.

Per dimostrare che d e d' sono topologicamente equivalenti e' sufficiente osservare che, per ogni $x \in X$ e per ogni $\epsilon > 0$ reale si ha:

- $B^{d'}_\epsilon(x) = X$ se $\epsilon \geqslant 1$
- $B^{d'}_\epsilon(x) = B^{d}_{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}(x)$ se $0 < \epsilon < 1$

viceversa, qualunque sia $\epsilon > 0$, $B^d_\epsilon(x) = B^{d'}_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(x)$.

1.10) Ricordiamo che $\mathcal{U}$ è una topologia su X se

(T1) $\emptyset, \ X \in \mathcal{U}$;

(T2) se $U = \bigcup U_i$ è un'unione arbitraria di aperti ($U_i \in \mathcal{U}$ per ogni i) allora $U \in \mathcal{U}$;

(T3) se $V = U_1 \cap \ldots \cap U_r$ è intersezione finita di aperti, allora anche $V \in \mathcal{U}$.

Siano ora $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ due topologie su X, vogliamo mostrare che $\mathcal{U} := \{U \mid U \in \mathcal{U}_1 \wedge U \in \mathcal{U}_2\}$ è a sua volta una topologia:

(T1) per (T1), $\emptyset$ e X sono elementi di $\mathcal{U}_1$ e di $\mathcal{U}_2$ e dunque $\emptyset, \ X \in \mathcal{U}$;

(T2) se (U_i) è una famiglia arbitraria di aperti in $\mathcal{U}$, allora ogni U_i appartiene sia ad $\mathcal{U}_1$ che ad $\mathcal{U}_2$ e dunque per (T2) la loro unione è un aperto in entrambe le topologie, da cui $\bigcup U_i \in \mathcal{U}$;

(T3) se $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{U}$, allora $U_i \in \mathcal{U}_1$ e $U_i \in \mathcal{U}_2$ per ogni $i = 1, \ldots, r$ e per (T3) $U_1 \cap \ldots \cap U_r \in \mathcal{U}_1$ $U_1 \cap \ldots \cap U_r \in \mathcal{U}_2$ pertanto $U_1 \cap \ldots \cap U_r \in \mathcal{U}$.

1.11) i) Ricordiamo che un punto x di uno spazio topologico $(X,\mathcal{U})$ si dice punto di chiusura dell'insieme $A \subseteq X$ se ogni aperto $U \in \mathcal{U}$ che contiene x contiene anche punti di A. Allora la chiusura $\overline{A}$ è l'insieme dei punti di chiusura di A.

Notiamo prima di tutto che se $A \subseteq C$ allora $\overline{A} \subseteq \overline{C}$, in quanto se x è un punto di chiusura di A, allora ogni aperto $U \in \mathcal{U}$ che contiene x contiene punti di A, e dunque anche di C. Pertanto,

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \quad \text{ e } \quad B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

pertanto $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Adesso supponiamo che x sia un punto di chiusura di $A \cup B$, allora per ogni $U \in \mathcal{U}$ con $x \in U$ vale $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, ovvero U interseca non banalmente almeno uno tra A e B e quindi è un punto di chiusura di almeno uno tra A e B, cioè $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

ii) Poiché $A \cap B \subseteq A$ allora $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ e, analogamente, deve valere $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. Pertanto $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

L'inclusione opposta non vale: si considerino ad esempio gli intervalli $(-1,0)$ e $(0,1)$ in $\mathbf{R}$ con la topologia euclidea, allora

$$\overline{(-1,0) \cap (0,1)} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subset \overline{(-1,0)} \cap \overline{(0,1)} = [1,0] \cap [0,1] = \{0\}.$$

iii) $Int(A \cap B)$ e' il piu' grande aperto di X contenuto in $A \cap B$ che a sua volta e' contenuto sia in A che in B. Pertanto $Int(A \cap B)$ e' contenuto sia in $Int(A)$ che in $Int(B)$, quindi $Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$.

D'altra parte $Int(A) \subseteq A$ e $Int(B) \subseteq B$ dunque $Int(A) \cap Int(B) \subset A \cap B$ ed inoltre $Int(A) \cap Int(B)$ e' un aperto di X contenuto in $A \cap B$. Pertanto $Int(A) \cap Int(B) \subseteq Int(A \cap B)$.

iv) $Int(A) \cup Int(B)$ e' un aperto di X contenuto in $A \cup B$. Per definizione di $Int(A \cup B)$ si ha dunque $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B)$.

Non vale l'inclusione opposta in generale. Si considerino ad esempio $A = \mathbb{Q}$ e $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Si ha che $Int(A) = \emptyset$ perche' non esiste nessun aperto non vuoto della topologia euclieda interamente contenuto in $\mathbb{Q}$; analogamente $Int(B) = \emptyset$. Pertanto $Int(A) \cup Int(B) = \emptyset$. D'altra parte $A = B = \mathbb{R}$ che e' aperto nella topologia euclidea dunque coincide con il suo interiore.