Geometria 3 a.a. 2019-20

Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini

Foglio n. 10 Esercizi

[1]

10.1) Sia $\mathbf{R}^2$ dotato di topologia euclidea e siano A e B due circonferenze che non si intersecano tra loro. Sia inoltre r una retta secante A ed esterna a B. Determinare le componenti connesse per arco di $\mathbf{R}^2 \setminus (A \cup B \cup r)$.

10.2) Si consideri $\mathbf{R}^3$ dotato di topologia euclidea. Mostrare che ogni sottospazio X, formato da due rette sghembe, ha lo stesso tipo di omotopia di uno spazio topologico formato da due punti e munito di topologia discreta.

10.3) Sia $\mathbf{R}^2$ dotato di topologia euclidea. Considera il sottospazio T dato da

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

(i) Mostra che il sottospazio S di $\mathbf{R}^2$ formato dai lati di T paralleli agli assi è **retratto di deformazione** di T.

(ii) Deduci che questo vale per ogni triangolo T in $\mathbf{R}^2$ ed ogni sottospazio S formato da due suoi lati.

10.4) (i) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$, dove ℓ una qualsiasi retta di $\mathbf{R^3}$, con punto base un qualsiasi punto di $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$.

(ii) Calcolare il gruppo fondamentale di

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\},$$

con punto base un qualsiasi punto di C.

(iii) Calcolare il gruppo fondamentale del nastro di Moebius M, con punto base un qualsiasi punto di M.

10.5) Sia X uno spazio topologico tale che $X = U \cup V$, dove U e V sono aperti di X, semplicemente connessi e tali che $U \cap V \neq \emptyset$ sia connesso per archi. Dimostrare che X e' semplicemente connesso.

10.6) Si consideri il sottospazio del piano euclideo

$$D := \overline{B_1(\vec{0})} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

(i) Dimostrare che l'insieme $A := \{(x, y) \in D \mid D \setminus \{(x, y)\}$ semplicemente connesso$\}$ e' $A = \partial D = S^1$.

(ii) Dimostrare che, per ogni omeomorfismo $D \xrightarrow{\phi} D$, si ha $\phi(S^1) = S^1$.

10.7) Si consideri il piano euclideo $\mathbf{R^2}$ ed il sottospazio

$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ |x| + |y| \geq 1\}.$$

Si provi che X e' connesso per archi e si calcoli il gruppo fondamentale di X rispetto ad un qualsiasi suo punto.

[1]Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

10.8) (a) Si consideri $Y = M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ l'insieme delle matrici 2×2 ad entrate reali. L'applicazione naturale

$$Y \to \mathbf{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a, b, c, d)$$

identifica Y con $\mathbf{R}^4$ euclideo, fornendo Y di struttura di spazio topologico. Si consideri il gruppo additivo con operazione di addizione tra matrici:

$$G := \left\{ A = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \in Y \mid m_i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(a.1) Mostrare che l'azione di G su Y determinata dall'addizione di matrici e' un'azione **propriamente discontinua** di G su Y.

(a.2) Determinare un modello di Y/G, stabilendo inoltre se esso sia connesso per archi.

(a.3) Determinare il gruppo fondamentale di Y/G.

(a.4) Y/G puo' essere omeomorfo, oppure omotopicamente equivalente, alla (iper)sfera S^n, per un qualche $n \geq 0$?

(b) Si consideri il sottoinsieme $X \subset Y$ determinato da

$$X := \left\{ B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y \mid x \in \mathbf{R} \right\}$$

(b.1) Nell'omeomorfismo $Y \cong \mathbf{R}^4$ stabilito al punto (1), verificare che X si identifica ad un sottospazio di Y omeomorfo a $\mathbf{R}$.

(b.2) Sia

$$\Gamma := \left\{ C = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y \mid m \in \mathbf{Z} \right\} \subset X.$$

Verificare che Γ e' un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne. Inoltre, verificare che il prodotto righe per colonne induce un'azione di Γ su X che e' **propriamente discontinua**.

(b.3) Determinare un modello di X/Γ, stabilendo inoltre se esso sia connesso per archi.

(b.4) Determinare il gruppo fondamentale di X/Γ.

10.9) Si consideri $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ dotato della topologia indotta. Consideriamo l'applicazione continua

$$f_k : S^1 \to S^1, \quad z \to z^k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Descrivere l'omomorfismo indotto

$$(f_k)_* : \Pi_1(S^1, (1,0)) \to \Pi_1(S^1, (1,0))$$

deducendo per quali k l'applicazione f_k e' omotopa all'identita'.

10.10) Si consideri il piano proiettivo complesso $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ed il sottospazio

$$X := \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid x_0 x_1 \neq 0\}.$$

Determinare uno spazio topologico compatto e connesso per archi che sia omotopicamente equivalente a X e calcolare contestualmente il gruppo di omotopia di X.

10.11) Sia $(Y, \mathcal{U}_Y)$ uno spazio topologico. Y si dice **irriducibile** se Y non puo' essere espresso come

$$Y = Y_1 \cup Y_2,$$

dove Y_1, Y_2 sono chiusi propri (necessariamente non vuoti) di Y. Altrimenti Y si dira' **riducibile**. Nel seguito, considereremo anche il campo $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ e, per ogni intero $n \geq 1$, denoteremo con $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ lo spazio affine n-dimensionale sul campo $\mathbf{K}$.

(a) Provare che Y e' irriducibile se, e solo se, ogni due aperti $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_Y$ non vuoti e propriamente contenuti in Y sono tali che $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

(b) Provare che Y e' irreducibile se, e solo se, per ogni coppia di punti distinti p_1, $p_2 \in Y$ esiste un sottospazio topologico $Z \subseteq Y$ irriducibile e tale che p_1, $p_2 \in Z$.

(c) Provare che Y e' irreducibile se, e solo se, ogni aperto non vuoto $U \subseteq Y$ e' **denso**, i.e. $\overline{U} = Y$ dove $\overline{U}$ denota la chiusura di U in Y;

(d) Dimostrare che se $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' dotato dell'usuale topologia euclidea allora $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' uno spazio topologico **riducibile**.

(e) Dimostrare che se $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' dotato invece di **topologia di Zariski**, allora esso e' uno spazio topologico **irriducibile**.

(f) Dedurre che, per ogni $n \geq 1$, $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ dotato di **topologia di Zariski** non e' uno spazio topologico di Hausdorff ma e' uno spazio topologico T_1.

(g) In $\mathbf{A}^2_{\mathbf{K}}$, con coordinate affini (x, y), dotato di **topologia di Zariski** si consideri la curva affine $Y = Z(xy) \subset \mathbf{A}^2$. Dimostrare che Y e' un sottospazio topologico connesso e riducibile.