Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Foglio n. 10 Esercizi - SVOLGIMENTI
[1]

10.1) Sia $\mathbf{R}^2$ dotato di topologia euclidea e siano $A$ e $B$ due circonferenze che non si intersecano tra loro. Sia inoltre $r$ una retta secante $A$ ed esterna a $B$. Determinare le componenti connesse per arco di $\mathbf{R}^2 \setminus (A \cup B \cup r)$.

10.2) Si consideri $\mathbf{R}^3$ dotato di topologia euclidea. Mostrare che ogni sottospazio $X$, formato da due rette sghembe, ha lo stesso tipo di omotopia di uno spazio topologico formato da due punti e munito di topologia discreta.

10.3) Sia $\mathbf{R}^2$ dotato di topologia euclidea. Considera il sottospazio $T$ dato da

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

(i) Mostra che il sottospazio $S$ di $\mathbf{R}^2$ formato dai lati di $T$ paralleli agli assi è **retratto di deformazione** di $T$.

(ii) Deduci che questo vale per ogni triangolo $T$ in $\mathbf{R}^2$ ed ogni sottospazio $S$ formato da due suoi lati.

10.4) (i) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$, dove $\ell$ una qualsiasi retta di $\mathbf{R^3}$, con punto base un qualsiasi punto di $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$.

(ii) Calcolare il gruppo fondamentale di

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ -1 \leq z \leq 1\},$$

con punto base un qualsiasi punto di $C$.

(iii) Calcolare il gruppo fondamentale del nastro di Moebius $M$, con punto base un qualsiasi punto di $M$.

10.5) Sia $X$ uno spazio topologico tale che $X = U \cup V$, dove $U$ e $V$ sono aperti di $X$, semplicemente connessi e tali che $U \cap V \neq \emptyset$ sia connesso per archi. Dimostrare che $X$ e' semplicemente connesso.

10.6) Si consideri il sottospazio del piano euclideo

$$D := \overline{B_1(\vec{0})} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

(i) Dimostrare che l'insieme $A := \{(x, y) \in D \mid D \setminus \{(x, y)\}$ semplicemente connesso$\}$ e' $A = \partial D = S^1$.

(ii) Dimostrare che, per ogni omeomorfismo $D \xrightarrow{\phi} D$, si ha $\phi(S^1) = S^1$.

10.7) Si consideri il piano euclideo $\mathbf{R^2}$ ed il sottospazio

$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \ |x| + |y| \geq 1\}.$$

Si provi che $X$ e' connesso per archi e si calcoli il gruppo fondamentale di $X$ rispetto ad un qualsiasi suo punto.

[1]Parte della stesura in latex del presente file e' a cura della Prof.ssa Martina Lanini. Ringraziamenti per aver permesso l'utilizzo

10.8) (a) Si consideri $Y = M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ l'insieme delle matrici $2 \times 2$ ad entrate reali. L'applicazione naturale

$$Y \to \mathbf{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a, b, c, d)$$

identifica $Y$ con $\mathbf{R}^4$ euclideo, fornendo $Y$ di struttura di spazio topologico. Si consideri il gruppo additivo con operazione di addizione tra matrici:

$$G := \left\{ A = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \in Y \mid m_i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(a.1) Mostrare che l'azione di $G$ su $Y$ determinata dall'addizione di matrici e' un'azione **propriamente discontinua** di $G$ su $Y$.

(a.2) Determinare un modello di $Y/G$, stabilendo inoltre se esso sia connesso per archi.

(a.3) Determinare il gruppo fondamentale di $Y/G$.

(a.4) $Y/G$ puo' essere omeomorfo, oppure omotopicamente equivalente, alla (iper)sfera $S^n$, per un qualche $n \geq 0$?

(b) Si consideri il sottoinsieme $X \subset Y$ determinato da

$$X := \left\{ B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y \mid x \in \mathbf{R} \right\}$$

(b.1) Nell'omeomorfismo $Y \cong \mathbf{R}^4$ stabilito al punto (1), verificare che $X$ si identifica ad un sottospazio di $Y$ omeomorfo a $\mathbf{R}$.

(b.2) Sia

$$\Gamma := \left\{ C = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y \mid m \in \mathbf{Z} \right\} \subset X.$$

Verificare che $\Gamma$ e' un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne. Inoltre, verificare che il prodotto righe per colonne induce un'azione di $\Gamma$ su $X$ che e' **propriamente discontinua**.

(b.3) Determinare un modello di $X/\Gamma$, stabilendo inoltre se esso sia connesso per archi.

(b.4) Determinare il gruppo fondamentale di $X/\Gamma$.

10.9) Si consideri $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ dotato della topologia indotta. Consideriamo l'applicazione continua

$$f_k : S^1 \to S^1, \;\; z \to z^k, \;\; k \in \mathbf{Z}.$$

Descrivere l'omomorfismo indotto

$$(f_k)_* : \Pi_1(S^1, (1,0)) \to \Pi_1(S^1, (1,0))$$

deducendo per quali $k$ l'applicazione $f_k$ e' omotopa all'identita'.

10.10) Si consideri il piano proiettivo complesso $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ed il sottospazio

$$X := \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid x_0 x_1 \neq 0\}.$$

Determinare uno spazio topologico compatto e connesso per archi che sia omotopicamente equivalente a $X$ e calcolare contestualmente il gruppo di omotopia di $X$.

10.11) Sia $(Y, \mathcal{U}_Y)$ uno spazio topologico. $Y$ si dice **irriducibile** se $Y$ non puo' essere espresso come

$$Y = Y_1 \cup Y_2,$$

dove $Y_1, Y_2$ sono chiusi propri (necessariamente non vuoti) di $Y$. Altrimenti $Y$ si dira' **riducibile**. Nel seguito, considereremo anche il campo $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ e, per ogni intero $n \geq 1$, denoteremo con $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ lo spazio affine $n$-dimensionale sul campo $\mathbf{K}$.

(a) Provare che $Y$ e' irriducibile se, e solo se, ogni due aperti $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_Y$ non vuoti e propriamente contenuti in $Y$ sono tali che $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

(b) Provare che $Y$ e' irreducibile se, e solo se, per ogni coppia di punti distinti $p_1,\ p_2 \in Y$ esiste un sottospazio topologico $Z \subseteq Y$ irriducibile e tale che $p_1,\ p_2 \in Z$.

(c) Provare che $Y$ e' irreducibile se, e solo se, ogni aperto non vuoto $U \subseteq Y$ e' **denso**, i.e. $\overline{U} = Y$ dove $\overline{U}$ denota la chiusura di $U$ in $Y$;

(d) Dimostrare che se $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' dotato dell'usuale topologia euclidea allora $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' uno spazio topologico **riducibile**.

(e) Dimostrare che se $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' dotato invece di **topologia di Zariski**, allora esso e' uno spazio topologico **irriducibile**.

(f) Dedurre che, per ogni $n \geq 1$, $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ dotato di **topologia di Zariski** non e' uno spazio topologico di Hausdorff ma e' uno spazio topologico $T_1$.

(g) In $\mathbf{A}^2_{\mathbf{K}}$, con coordinate affini $(x, y)$, dotato di **topologia di Zariski** si consideri la curva affine $Y = Z(xy) \subset \mathbf{A}^2$. Dimostrare che $Y$ e' un sottospazio topologico connesso e riducibile.

**Svolgimenti**

10.1) Basta ricordare che un aperto di $\mathbf{R}^n$ è connesso per archi se e solo se è connesso. Allora se dal piano reale rimuoviamo due circonferenze che non si intersecano ed una retta secante ad una di esse ed esterna all'altra, otteniamo 5 componenti connesse, e dunque 5 componenti connesse per archi.

10.2) Ricordiamo che due spazi $X, Y$ hanno lo **stesso tipo di omotopia** se esistono due applicazioni continue $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ tali che l'applicazione continua $g \circ f$, risp. $f \circ g$, è omotopa a $\mathrm{id}_X$, risp. $\mathrm{id}_Y$. Ricordiamo inoltre che due applicazioni continue $h, k : U \to V$ si dicono **omotope** se esiste un'applicazione continua $F : U \times [0,1] \to V$ tale che $F(u, 0) = h(u)$ e $F(u, 1) = k(u)$.

Siano allora $\ell_1$ e $\ell_2$ due rette sghembe di $\mathbf{R^3}$. Prendiamo due punti $p_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \ell_1,\ p_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \ell_2$ e i corrispettivi due vettori direttori $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1),\ \vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ delle rette cosicche' le rette si descrivano parametricamente come:

$$\ell_1 = \{(x_1 + \lambda a_1, y_1 + \lambda b_1, z_1 + \lambda c_1) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

$$\ell_2 = \{(x_2 + \lambda a_2, y_2 + \lambda b_2, z_2 + \lambda c_2) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Facciamo vedere che $X := \ell_1 \cup \ell_2$ è omotopicamente equivalente al sottospazio $Y = \{p_1, p_2\}$ di $\mathbf{R}^3$.

Definiamo allora l'applicazione

$$f : X \to Y, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} p_1 & \text{se } (x, y, z) \in \ell_1 \\ p_2 & \text{se } (x, y, z) \in \ell_2 \end{cases}$$

e prendiamo come $g$ l'inclusione $Y \hookrightarrow X$.

Chiaramente $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Rimane solo da dimostrare che $g \circ f$ è omotopa a $\mathrm{id}_X$. A tal fine notiamo che possiamo scrivere $f$ in modo compatto come

$$f(x_i + \lambda a_i, y_i + \lambda b_i, z_i + \lambda c_i) = (x_i, y_i, z_i) \text{ per } i = 1, 2,$$

e, per $i = 1, 2$, definiamo

$$F : X \times [0,1] \to X, \qquad ((x_i + \lambda a_i, y_i + \lambda b_i, z_i + \lambda c_i), t) \mapsto (x_i + t\lambda a_i, y_i + t\lambda b_i, z_i + t\lambda c_i)$$

Vediamo immediatamente che $F$ e' una funzione continua. Inoltre, come desiderato,

$$\begin{aligned} F((x_i + \lambda a_i, y_i + \lambda b_i, z_i + \lambda c_i), 0) &= (x_i, y_i, z_i) = f(x_i, y_i, z_i), && \text{per } i = 1, 2 \\ F((x_i + \lambda a_i, y_i + \lambda b_i, z_i + \lambda c_i), 1) &= (x_i + \lambda a_i, y_i + \lambda b_i, z_i + \lambda c_i) \\ &= \mathrm{id}_X((x_i + \lambda a_i, y_i + \lambda b_i, z_i + \lambda c_i)), && \text{per } i = 1, 2 \end{aligned}$$

Per concludere notiamo che lo spazio topologico $\{p_1, p_2\}$ (con la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $\mathbf{R}^2$) è omeomorfo ad uno spazio topologico formato da due punti $\{P, Q\}$ dotato di topologia discreta: i punti in uno spazio metrico sono chiusi e pertanto $p_1$ e $p_2$ sono chiusi, dunque l'applicazione data da

$$p_1 \mapsto P, \quad p_2 \mapsto Q$$

è un omeomorfismo. Ma ogni omeomorfismo è un'equivalenza omotopica e la composizione di due equivalenze omotopiche è nuovamente un'equivalenza omotopica, da cui la tesi.

10.3) Ricordiamo che una **retrazione** di uno spazio topologico $Y$ ad un suo sottospazio $X$ è un'applicazione continua

$$r : Y \to X$$

tale che $r(b) = b$ per ogni $b \in X$. Ricordiamo inoltre che un sottospazio $X$ di $Y$ è un **retratto di deformazione** di $Y$ se esiste una retrazione di $Y$ ad $X$ che è omotopa all'applicazione identità $\mathrm{id}_Y$, ovvero se esiste una funzione continua (**retrazione di deformazione**)

$$F : Y \times [0,1] \to Y$$

tale che, per ogni $a \in Y$ e per ogni $b \in X$, valga:

$$F(a, 0) = a, \; F(a, 1) \in X, \; F(b, 1) = b.$$

(i) Siano ora $T$ e $S$ come nel testo. Possiamo definire

$$F : T \times [0,1] \to T, \quad ((x, y), t) \mapsto (1 - t)(x, y) + t(x - \min\{x, y\}, y - \min\{x, y\}).$$

Quella appena definita è una funzione continua che ha tutte le proprietà richieste, pertanto concludiamo che $S$ è un retratto di deformazione di $T$.

(ii) Preso ora un qualunque triangolo $T$ in $\mathbf{R}^2$, esso (tramite una trasformazione affine) è omeomorfo al triangolo considerato nel punto (i). D'altronde, ogni sottospazio di $T$ costituito da due lati è omeomorfo allo spazio $S$ considerato nel punto (i) e pertanto basta comporre la retrazione di deformazione con due omeomorfismi per ottenere una nuova retrazione di deformazione, come desiderato.

10.4) (i) Prima di tutto $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ e' connesso per archi. Quindi il gruppo fondamentale di $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ e' indipendente dalla scelta del punto base. Nell'esercizio del **Foglio 9**, **Es. 9.6**, abbiamo dimostrato che $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ e' omotopicamente equivalente a $S^1$, dunque $\Pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \ell, \; p) \cong \mathbf{Z}$.

(ii) Il sottospazio

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ -1 \leq z \leq 1\}$$

e' un cilindro circolare limitato. E' connesso per archi, quindi il gruppo fondamentale di $C$ e' indipendente dalla scelta del punto base. Prendiamo $p = (1, 0, 0) \in C$ come punto base.

Notiamo che $C$ e' omomorfo a $S^1 \times [-1, \ 1]$. Poiche' $S^1$ e $[-1, 1]$ sono connessi per archi, allora

$$\Pi_1(C, p) \cong \Pi_1(S^1 \times [-1, 1], (1, 0, 0)) \cong \Pi_1(S^1, (1, 0)) \times \Pi_1([-1, 1], 0).$$

Poiche $[-1, 1]$ e' convesso, per l'esercizio del **Foglio 9**, **Es. 9.4**, esso e' contraibile quindi $\Pi_1([-1, 1], 0) \cong \{0\}$. Pertanto

$$\Pi_1(C, p) \cong \Pi_1(S^1, (1, 0)) \times \{0\} \cong \mathbf{Z} \times \{0\} \cong \mathbf{Z}.$$

(iii) Ricordiamo uno dei modi possibili per definire il nastro di Moebius $M$. Si considera $I := [0, 1]$; si prende $I \times I$ e sulle coppie $(t, s) \in I \times I$ si introduce la relazione di equivalenza $\sim$ tale che

$$(t, s) \sim (t', s') \ \Leftrightarrow \ \text{o } (t, s) = (t', s') \ \text{ oppure } \ \{t, t'\} = \{0, 1\} \ \text{ e } \ s' = 1 - s.$$

Pertanto

$$M = \frac{I \times I}{\sim}$$

dotato della topologia quoziente. Denoteremo d'ora in poi con $\pi := \pi_\sim$ la proiezione canonica e con $[(t, s)]$ la classe di $\sim$-equivalenza di $(t, s) \in I \times I$.

Per come e' definito, notiamo che $M$ e' connesso per archi, quindi il gruppo fondamentale di $M$ e' indipendente dalla scelta del punto base $p \in M$.

Consideriamo ora il sottospazio $\Delta \subset M$ definito da

$$\Delta := \{[(t, t)] \mid t \in I\}.$$

Come sottospazio, abbiamo un'inclusione

$$\Delta \overset{j}{\hookrightarrow} M$$

che e' ovviamente continua. Prendiamo $p = [(0, 0)] \in \Delta$.

Dimostriamo ora che $\Delta$ e' **retratto forte di deformazione** di $M$. Definiamo dapprima l'applicazione

$$r : M \to \Delta, \ \ [(t, s)] \to [(t, t)];$$

essa e' una retrazione di $M$ su $\Delta$ tale che $r \circ j = \mathrm{Id}_\Delta$. Definiamo anche l'applicazione

$$F : M \times I \to M, \quad ([(t, s)], \lambda) \to (1 - \lambda)[(t, t)] + \lambda[(t, s)] = [(t, (1 - \lambda)t + \lambda s)].$$

Essa e' un'omotopia per cui

$$j \circ r \sim_F \mathrm{Id}_M$$

e

$$F([(t, t)], \lambda) = [(t, t)] \ \ \forall \ \lambda \in I$$

i.e. $\Delta$ e' appunto **retratto forte di deformazione** di $M$. Pertanto abbiamo

$$\Pi_1(M, p) \cong \Pi_1(\Delta, p).$$

Dobbiamo dunque calcolare $\Pi_1(\Delta, p)$.

Per fare questo, sia $\Delta_I \subset I \times I$ la **diagonale**. Poiche' $I \times I$ e' $T_2$, la diagonale $\Delta_I$ e' chiusa come abbiamo visto in **Foglio 4 Esercizi**, **Es. 4.1**. Poiche' $I \times I$ e' compatto, $\Delta_I$ e' anche compatta. Notiamo inoltre che $\Delta_I \cong I$.

Sia $\pi_|$ la restrizione a $\Delta_I$ della proiezione canonica $\pi$. Chiaramente si ha $\Delta_I \xrightarrow{\pi_|} \Delta$. Abbiamo dunque un diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta_I & \xrightarrow{\phi} & S^1 \\ \downarrow^{\pi_|} & & \\ \Delta & & \end{array}$$

dove

$$\phi((t,t)) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

L'applicazione $\phi$ cosi' definita e' continua, perche' a componenti continue.

Per proprieta' universale della topologia quoziente, esiste

$$\widehat{\phi} : \Delta \to S^1$$

continua e tale che $\phi = \widehat{\phi} \circ \pi_|$.

Visto che

$$(1,0) = (\cos 2\pi 0, \sin 2\pi 0) = (\cos 2\pi 1, \sin 2\pi 1) \in S^1$$

e

$$p = [(0,0)] = [(1,1)] \in \Delta,$$

l'applicazione $\widehat{\phi}$ e' anche biiettiva.

Poiche' $\Delta$ e' un quoziente del compatto $\Delta_I$, esso e' compatto; mentre $S^1$ e' $T_2$, dunque $\widehat{\phi}$ e' anche chiusa.

Pertanto $(\Delta, p)$ e' omeomorfo a $(S^1, (1,0))$ e dunque $\Pi_1(\Delta, p) \cong \mathbf{Z}$.

10.5) Prima di tutto notiamo che, dalle ipotesi, $X$ e' connesso per archi. Quindi il gruppo di omotopia di $X$ e' indipendente dalla scelta del punto $p \in X$. Pertanto prendiamo $p \in U \cap V$.

Sia ora $[\gamma] \in \Pi_1(X, p)$ un qualsiasi elemento. Poiche' siamo nelle ipotesi del **teorema di Seifert-Van Kampen**, allora

$$[\gamma] = [\gamma_1][\gamma_2] \cdots [\gamma_r]$$

dove $\mathrm{Supp}(\gamma_i) \subset U$ oppure $\mathrm{Supp}(\gamma_i) \subset V$.

Sia $j \in \{1, \ldots, r\}$ un qualsiasi indice per cui $\mathrm{Supp}(\gamma_j) \subset V$. Poiche' $V$ e' semplicemente connesso, tutti i cammini chiusi di punto base $p$ sono omotopicamente equivalenti fra loro, dunque $[\gamma_j] = [\gamma_j^*]$, dove $\mathrm{Supp}(\gamma_j^*) \subset U \cap V$.

Utilizzando questa osservazione ed il fatto che $U \cap V \subset U$, allora

$$[\gamma] = [\gamma_1^*][\gamma_2^*] \cdots [\gamma_r^*] = [\gamma_1^* * \gamma_2^* * \cdots * \gamma_r^*]$$

tali che $\mathrm{Supp}(\gamma_j^*) \subset U$ per ogni $1 \leq j \leq r$.

Visto che $U$ e' semplicemente connesso, il cammino $\gamma_1^* * \gamma_2^* * \cdots * \gamma_r^*$ e' omotopicamente equivalente a $\epsilon_p$, dunque $[\gamma] = [\epsilon_p]$. Ne deduciamo che $\Pi_1(X, p) = \{0\}$. Visto che $X$ e' anche connesso per archi, allora $X$ e' semplicemente connesso.

10.6) (i) $D$ e' semplicemente connesso, quindi $\Pi_1(D, p) = \{0\}$, per ogni $p \in D$.

Se $p \in \mathrm{Int}(D)$, allora $D \setminus \{p\}$ e' connesso per archi e $D \setminus \{p\} \sim S^1$ dunque, per ogni $q \in D \setminus \{p\}$, $\Pi_1(D \setminus \{p\}, q) \cong \mathbf{Z}$.

Pertanto $A \subseteq D \setminus \mathrm{Int}(D) = \partial D$, l'ultima eguaglianza discende dal fatto che $D$ e' chiuso e da una delle possibili definizioni di frontiera.

D'altra parte, se $p \in \partial D$, possiamo definire una retrazione

$$r : D \setminus \{p\} \to S^1 \setminus \{p\}$$

per cui $r(q)$ e' il punto di intersezione (diverso da $p$) tra la retta congiungente $p$ e $q$ e la circonferenza $S^1$. Questo ci assicura che $S^1 \setminus \{p\}$ e' retratto forte di deformazione di $D \setminus \{p\}$. Ma $S^1 \setminus \{p\}$ e' contraibile, quindi $p \in A$. Pertanto, per doppia inclusione, $A = \partial D = S^1$.

(ii) Sia $\phi$ un qualsiasi omeomorfismo come nel testo. Allora $D \setminus \phi(S^1) \cong D \setminus S^1 = B_1(\vec{0})$ che e' semplicemente connesso. Per il punto (i), necessariamente $\phi(S^1) \subseteq A = S^1$.

Se per assurdo fosse $\phi(S^1) \subset S^1$, visto che $\phi(S^1)$ e' connesso per archi, perche' immagine continua di $S^1$ connessa per archi, allora $\phi(S^1)$ e' per forza un arco della circonferenza $S^1$. Ma allora $D \setminus \phi(S^1)$ non sarebbe ne' chiuso ne' aperto in $\mathbf{R^2}$, visto che i punti in $S^1 \setminus \phi(S^1)$ non sarebbero ne' interni ne' esterni per $D \setminus \phi(S^1)$. Questo contraddice l'esistenza dell'omeomorfismo $D \setminus \phi(S^1) \cong D \setminus S^1$ visto che $D \setminus S^1 = B_1(\vec{0})$ e' aperto di $\mathbf{R^2}$.

10.7) $X$ e' la porzione di piano individuata dal disco unitario (chiuso) di centro l'origine e privato della parte di piano contenuta all'interno del quadrato di vertici i punti

$$P_1 = (1, 0),\ P_2 = (0, 1),\ P_3 = (-1, 0),\ P_4 = (0, -1).$$

Poiche' la frontiera del disco e' contenuta in $X$, si deduce immediatamente che $X$ e' connesso per archi.

Possiamo dunque calcolare in gruppo fondamentale rispetto ad un qualsiasi punto di $X$, e.g. rispetto a $P_1$. Notiamo che, per ogni $\vec{x} \in X$ e per ogni $t \in I = [0, 1]$, si ha

$$t\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} + (1-t)\vec{x} \in X.$$

La precedente espressione fornisce un'equivalenza omotopica tra $X$ e $S^1$, pertanto $\Pi_1(X, P_1) \cong \mathbf{Z}$.

10.8) (a.1) Ovviamente l'addizione di matrici definisce un azione di $G$ su $Y$ e, con l'identificazione di $Y$ con $\mathbf{R^4}$, tale azione e' la traslazione attraverso vettori a coordinate intere. Quindi l'azione e' banalmente propriamente discontinua.

(a.2) Nell'identificazione

$$Y \cong \mathbf{R}^4 \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

si ottiene un isomorfismo di gruppi (ed un'equivalenza di azioni)

$$G \cong \mathbf{Z}^4 \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Pertanto

$$Y/G \cong \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}}{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \cong S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \cong T^4$$

dove $T^4$ e' il **toro 4-dimensionale**. Poiche' $S^1$ e' connesso per archi, anche $T^4 \cong Y/G$ e' connesso per archi.

(a.3) Poiche' $Y/G$ e' connesso per archi, non c'e' bisogno di specificare il punto base per il calcolo del gruppo fondamentale. Visto che l'azione di $G$ su $Y$ e' propriamente discontinua, allora la proiezione canonica

$$Y \to Y/G$$

e' un **rivestimento topologico**. Visto che $Y$ e' semplicemente connesso, perche' omeomorfo a $\mathbf{R}^4$, allora $\Pi_1(Y/G) \cong \mathbf{Z}^4 \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(a.3) $Y/G$ non puo' essere ne' omotopicamente equivalente, ne' a fortiori omeomorfo, a $S^n$, per ciascun $n \geq 0$. Infatti $S^0$ e' uno spazio topologico discreto costituito da due punti distinti che ha gruppo di omotopia $\{0\} \oplus \{0\}$; $S^1$ ha gruppo di omotopia $\mathbf{Z}$ mentre $S^n$ e' semplicemente connessa per $n \geq 2$.

(b.1) Nell'identificazione

$$Y \to \mathbf{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a, b, c, d)$$

$X$ si identifica alla retta di equazioni cartesiane

$$a = 1, \; c = 0, \; d = 1.$$

Pertanto $X$ e' manifestamente omoemorfa a $\mathbf{R}$.

(b.2) Le verifiche di abelianita' di $\Gamma$ ed azione di $\Gamma$ su $X$ sono immediate e lasciate allo studente. Notiamo che l'azione di $\Gamma$ su $X$ si identifica alla traslazione intera su $\mathbf{R}$, i.e. coincide con l'usuale azione additiva di $\mathbf{Z}$ su $\mathbf{R}$. Pertanto l'azione di $\Gamma$ su $X$ e' propriamente discontinua.

(b.3) $X/\Gamma \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1$ che e' dunque connesso per archi.

(b.4) $\Pi_1(X/\Gamma) \cong \mathbf{Z}$.

10.9) Notiamo che $z \in S^1$ e' quindi della forma $z = \exp^{2\pi i t}$, per qualche $t \in \mathbf{R}$. Visto che $\Pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbf{Z}$, per descrivere l'omomorfismo di gruppi $(f_k)_*$ e' sufficiente vedere come esso si comporta sul generatore di $\mathbf{Z} = \langle 1 \rangle$.

Ricordiamo l'isomorfismo

$$\mathbf{Z} \to \Pi_1(S^1, (1,0)), \quad 1 \to [\gamma]$$

dove $\gamma(t) = \exp^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Pertanto,

$$(f_k)_*([\gamma]) = [(f_k \circ \gamma)(t)] = \exp^{2\pi i k t}.$$

Pertanto, visto come omomorfismo di $\mathbf{Z}$, si ha $(f_k)_*(1) = k \in \mathbf{Z}$, i.e. $Im((f_k)_*) = k\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$.

Se $f_k$ e' omotopa a $\mathrm{Id}_{S^1}$, allora $(f_k)_* = \mathrm{Id}_{\mathbf{Z}}$. Pertanto $f_k$ e' omotopa a $\mathrm{Id}_{S^1}$ solo per $k = 1$.

10.10) Notiamo che

$$X = \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid x_0 x_1 = 0\}.$$

Quindi $p = [x_0, x_1, x_2] \in X$ e' anche individuato da $p = [1, \lambda, \mu]$, ove $\lambda = x_1/x_0 \in \mathbf{C}^*$ e $\mu = x_2/x_0 \in \mathbf{C}$. In altre parole $X$ e' omeomorfo a $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, l'omeomorfismo e' indotto dalla restrizione della corrispondenza

$$p = [1, \lambda, \mu] \to (\lambda, \mu)$$

tra la carta affine di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ dove $x_0 \neq 0$ ed il piano affine $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$, le cui coordinate affini (non omogenee) sono $(\lambda = x_1/x_0, \; \mu = x_2/x_0)$.

Ora $\mathbf{C}^*$ e' omeomorfo a $\mathbf{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ che e' quindi omotopicamente equivalente a $S^1$; invece $\mathbf{C}$ e' contraibile perche' convesso. Come visto nel **Foglio Esercizi 9**, **Es. 9.6**,

$$X \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \sim S^1 \times \{0\} \cong S^1$$

che e' manifestamente compatto e connesso per archi. Il gruppo fondamentale di $X$ e' dunque indipendente dalla scelta del punto base ed e' isomorfo a $\mathbf{Z}$.

10.11) (a) ($\Rightarrow$) Per ipotesi $Y$ e' irriducibile. Se esistessero due aperti $U_1, U_2 \subset Y$, non vuoti e propriamente contenuti in $Y$, tali che $\emptyset = U_1 \cap U_2$, allora passando al complementare in $Y$ si avrebbe $Y = Y_1 \cup Y_2$, dove $Y_i := Y \setminus U_i$, e' un chiuso proprio e non vuoto di $Y$ per $i = 1, 2$. Ma allora $Y$ sarebbe riducibile, contraddicendo l'ipotesi.

($\Leftarrow$) Se, per assurdo, esistessero due chiusi propri e non vuoti $Y_1, Y_2 \subset Y$ tali che $Y = Y_1 \cup Y_2$ allora, passando ai complementari in $Y$ avremmo che $U_i := Y \setminus Y_i$, $i = 1, 2$, sarebbe un aperto non vuoto e si avrebbe inoltre $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, una contraddizione.

(b) ($\Rightarrow$) Se $Y$ e' irriducibile, basta prendere $Z = Y$.

($\Leftarrow$) Supponiamo per assurdo che $Y$ sia riducibile e sia $Y = Y_1 \cup Y_2$, dove $Y_i$ chiuso proprio e non vuoto di $Y$, $1 \leq i \leq 2$. Sia $p_i \in Y_i \setminus Y_{3-i}$, $1 \leq i \leq 2$, e sia $Z$ un qualsiasi irriducibile $Z \subset Y$ t.c. $p_1, p_2 \in Z$. Allora si avrebbe $Z = Z_1 \cup Z_2$, dove $Z_i := Y_i \cap Z$, $1 \leq i \leq 2$, e $Z_1$, $Z_2$ non vuoti e chiusi propri di $Z$, dato che $P_i \notin Z_{3-i}$. Si contraddice cosi' l'irriducibilita' di $Z$.

(c) ($\Rightarrow$) Sia $Y$ irriducibile e sia $U$ un qualsiasi aperto non vuoto di $Y$. Se $U$ non fosse denso in $Y$, si avrebbe

$$Y = \overline{U} \cup (Y \setminus U),$$

dove $\overline{U}$ e $Y \setminus U$ sono entrambi chiusi propri e non vuoti di $Y$. Questo e' contro l'ipotesi di irriducibilita' di $Y$.

($\Leftarrow$) Sia $U \subset Y$ un qualsiasi aperto non vuoto e propriamente contenuto in $Y$. Sia ora $V$ un qualsiasi altro aperto non vuoto di $Y$.

Se $V = Y$ allora $U \cap V = U \neq \emptyset$.

Se $V \subseteq U$ allora $V \cap U = V \neq \emptyset$

Se infine $V$ non e' contenuto in $U$, allora $V$ e' un intorno aperto per ogni suo punto $p \in V$. Poiche' $U$ e' denso, ogni tale $p$ deve essere aderente ad $U$, i.e. $U \cap V \neq \emptyset$.

Per il punto (a) deduciamo che $Y$ e' irriducibile.

(d) Se $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ e' dotato di topologia euclidea, sappiamo che e' uno spazio di Hausdorff. Pertanto dal punto (a), non puo' essere irriducibile. Alternativamente, considerando $\overline{B_1(\vec{0})}$ e $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}} \setminus B_1(\vec{0})$, essi sono due chiusi propri e non vuoti della topologia euclidea tali che

$$\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}} = \overline{B_1(\vec{0})} \cup \left(\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}} \setminus B_1(\vec{0})\right).$$

Dunque $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ dotato di topologia euclidea e' riducibile.

(e) Sia $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ dotato di **topologia di Zariski**.

Se $n = 1$, poiche' $\mathbf{K}[x]$ e' un dominio euclideo, in particolare un dominio ad ideali principali, i chiusi propri e non vuoti di $\mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$ sono, per il teorema fondamentale dell'algebra, i sottoinsiemi costituiti da un numero finito di punti (i.e. gli aperti dati dalla topologia di Zariski sono gli aperti della topologia cofinita su $\mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$). Poiche' $\mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$ e' di cardinalita' infinita, ne deduciamo che $\mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$ con topologia di Zariski e' irriducibile.

Notiamo che la proprieta' di irriducibilita' e' una proprieta' topologica, i.e. invariante per omeomorfismi.

Sia ora $n \geq 2$ e si considerino due qualsiasi punti distinti $p_1$, $p_2 \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$. La retta $\ell := \langle p_1, p_2 \rangle$ congiungente $p_1$ e $p_2$ e' un sottospazio irriducibile, visto che $\ell$ e' omeomorfa ad $\mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$ mediante equazioni parametriche di $\ell$. Dal punto (b) deduciamo che $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ dotato di topologia di Zariski e' irriducibile.

(f) Dal punto (e), per ogni $n \geq 1$, $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ dotato di topologia di Zariski e' irriducibile. Quindi dal punto (a), non puo' essere uno spazio topologico $T_2$. Esso invece e' $T_1$ perche', per ogni punto $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$, abbiamo che

$$\{p\} = Z((x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n))$$

dove $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \subset \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ e' un'ideale massimale, i.e. **i punti sono chiusi nella topologia di Zariski**.

(f) La curva affine $Y = Z((xy))$ e' riducibile; infatti in $\mathbf{K}[x, y]$ si ha un'eguaglianza di ideali

$$(xy) = (x) \cap (y)$$

e dunque una decomposizione topologica di chiusi

$$Y = Z((x)) \cup Z((y)) = Y_1 \cup Y_2,$$

dove $Y_1, Y_2 \subset Y$ chiusi propri e non vuoti di $Y$.

Osserviamo che tuttavia $Y$ e' uno spazio topologico connesso: se fosse $Y = U_1 \cup U_2$, tali che $U_1$, $U_2$ aperti non vuoti di $Y$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, allora $U_1$ e $U_2$ sarebbero anche chiusi propri di $Y$. Tutte le eventualita' darebbero degli assurdi.