Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

Svolgimenti VIII Foglio Esercitazioni

Svolgimento Esercizio 1. (i) Le condizioni date

$$\varphi(\underline{e}_1+\underline{e}_3)=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3,\ \ \varphi(2\underline{e}_1)=\underline{e}_2,\ \ \varphi(\underline{e}_2+3\underline{e}_3)=3\underline{e}_1+5\underline{e}_2+6\underline{e}_3$$

si possono riscrivere usando la linearita' di φ. Infatti si ha

$$\varphi(\underline{e}_1)+\varphi(\underline{e}_3)=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3,\ \ 2\varphi(\underline{e}_1)=\underline{e}_2,\ \ \varphi(\underline{e}_2)+3\varphi(\underline{e}_3)=3\underline{e}_1+5\underline{e}_2+6\underline{e}_3.$$

Quindi dalla seconda si ottiene

$$\varphi(\underline{e}_1)=\frac{1}{2}\underline{e}_2.$$

Pertanto, dalla prima condizione

$$\varphi(\underline{e}_3)=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3-\varphi(\underline{e}_1)=$$
$$=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3-\frac{1}{2}\underline{e}_2=\underline{e}_1+\frac{1}{2}\underline{e}_2+2\underline{e}_3.$$

Infine dalla terza

$$\varphi(\underline{e}_2)=3\underline{e}_1+5\underline{e}_2+6\underline{e}_3-3\varphi(\underline{e}_3),$$

sostituendo la descrizione di $\varphi(\underline{e}_3)$ trovata precedentemente si ottiene finalmente che

$$A=M^{\mathcal{E}^3}_{\mathcal{E}^3}(\varphi)\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&2\end{pmatrix}.$$

(ii) Poiche' le prime 2 righe della matrice A sono indipendenti, ma la I e la III riga sono proporzionali, si ha che $rg(A)=2$. Ne deduciamo quindi che $\dim(Im(\varphi))=2$. Dal Teorema del Rango, si ottiene dunque che $\dim(Ker(\varphi))=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(Im(\varphi))=3-2=1$.
(iii) Il nucleo di φ ha equazioni cartesiane dedotte dal sistema lineare omogeneo

$$A\underline{x}=\underline{0}.$$

Poiche' la matrice A ha rango due, $Ker(\varphi)$ e' definito da due equazioni cartesiane indipendenti. Le soluzioni di questo sistema omogeneo dipendono dunque da

$$\dim(\mathbb{R}^3)-rg(A)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(Im(\varphi))=3-2=1$$

parametro libero, che e' proprio la dimensione del nucleo come doveva essere.

Risolvendo il banale sistema lineare omogeneo si trova che $Ker(\varphi)=\langle\underline{v}_1\rangle$, dove

$$\underline{v}_1=\begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix}$$

espresso in coordinate rispetto a $\mathcal{E}^3$, i.e.

$$\underline{v}_1=7\underline{e}_1-\underline{e}_2.$$

(iii) I vettori

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono banalmente linearmente indipendenti. Il sottospazio W e' dato dal loro Span, i.e. $W = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$, ha pertanto equazioni parametriche

$$x_1 = t, \ x_2 = -t + s, \ x_3 = 2t, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Poiche' $\underline{v}_1 \notin W$, sicuramente la retta vettoriale da lui generata non puo' essere contenuta in W. Se ne deduce che $Ker(\varphi) \cap W = \{\underline{0}\}$. Pertanto W e $Ker(\varphi)$ sono in somma diretta.

Dalla formula di Grassmann

$$\dim(W \oplus Ker(\varphi)) = \dim(W) + \dim(Ker(\varphi)) = 2 + 1 = 3.$$

Visto che $W \oplus Ker(\varphi)$ e' sottospazio di $\mathbb{R}^3$ della stessa dimensione, vuol dire che

$$W \oplus Ker(\varphi) = \mathbb{R}^3$$

e questo dimostra che W e $Ker(\varphi)$ sono sottospazi supplementari in $\mathbb{R}^3$.

(v) La base $\mathcal{V}$ e' semplicemente quella data dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo gia' che

$$A\underline{v}_1 = \underline{0}$$

che, in termini di φ, ci dice semplicemente

$$\varphi(\underline{v}_1) = \underline{0}.$$

Se ora calcoliamo $A\underline{v}_2$, notiamo che

$$A\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dove il vettore a destra e' il doppio di $\underline{v}_2$. In termini di φ questo vuol dire semplicemente che

$$\varphi(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_2.$$

Infine calcolando $A\underline{v}_3$, notiamo che

$$A\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove il vettore a destra e' $\frac{7}{2}\underline{v}_2$. In termini di φ questo vuol dire semplicemente che

$$\varphi(\underline{v}_3) = \frac{7}{2}\underline{v}_3.$$

Pertanto

$$B := M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

(vi) Poiche' dai conti precedenti abbiamo visto che

$$A\underline{v}_1 = \underline{0},\ A\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ A\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

in termini di φ cio' si rilegge come

$$\varphi(\underline{v}_1) = \underline{0},\ \varphi(\underline{v}_2) = 2\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3,\ \varphi(\underline{v}_3) = \frac{7}{2}\underline{e}_2.$$

Pertanto

$$C := M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}^3}(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 2. (i) La matrice A e' semplicemente

$$A = M_{\mathcal{E}^4}^{\mathcal{E}^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Notiamo che $rg(A) = 2$ dato che la III riga e' data da $2I + 2II$ mentre I e II riga sono indipendenti. Pertanto f non puo' essere suriettiva. Precisamente abbiamo $\dim(Im(f)) = 2$. Una base di $Im(f)$ e' costituita ad esempio dalla I e dalla II colonna di A. Pertanto, equazioni parametriche per $Im(f)$ sono date da

$$\underline{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre $Im(f)$ e' un iperpiano in $\mathbb{R}^3$ quindi e' definito da un'unica equazione cartesiana data da $2X_1 + 2X_2 - X_3 = 0$.
(iii) Poiche' il dominio di f ha dimensione strettamente maggiore di quella del codominio di f, sicuramente l'applicazione f non puo' essere iniettiva. Per il Teorema del Rango, abbiamo anche che

$$\dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(Im(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Nelle coordinate di $\mathbb{R}^4$ date da $\mathcal{E}^4$, equazioni cartesiane per il nucleo sono date dal sistema omogeneo

$$X_1 - X_2 + X_4 = 0 = X_2 + X_3 - X_4.$$

Le soluzioni di questo sistema lineare forniscono $Ker(f) = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Infine, equazioni parametriche per $Ker(f)$ sono $\underline{x} = \begin{pmatrix} -s \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix}$, $s, t, \in \mathbb{R}$.

Svolgimento Esercizio 3. (i) Oltre ai soliti metodi piu' volte esposti nelle precedenti esercitazioni, un moto alternativo e piu' rapido e' quello di mettere ordinatamente per colonna le colonne dei tre vettori dati in una matice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

e notare che $rg(M) = 3$. Questo ci dice che le tre colonne di M sono indipendenti. Ma allora i tre vettori dati sono linearmente indipendenti e dunque costituiscono una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^3$, visto che $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
(ii) La matrice cambiamento di base $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}^3}$ e' proprio la matrice M determinata al punto precedente.

Invece la matrice $M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{V}}$ non e' altro che la matrice inversa di M, cioe' M^{-1}, che allo stato attuale si puo' calcolare con l'utilizzo delle trasformazioni elementari partendo dalla matrice 3×6

$$(I_3 \; M)$$

arrivando alla matrice

$$(M^{-1} \; I_3).$$

(ii) Il vettore $\underline{w}$ avra' coordinate $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ rispetto ad $\mathcal{E}^3$ mentre avra' coordinate $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{V}$. La legge di trasformazione delle coordinate e'

$$\underline{x} = M\underline{y}.$$

Visto che noi conosciamo le coordinate $\underline{x}$ del vettore $\underline{w}$, precisamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, un modo piu' rapido per trovare le coordinate $\underline{y}$ e' fare

$$\underline{y} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In modo alternativo, si puo' risolvere il sistema lineare

$$M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entrambe le strategie forniscono

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Per quanto riguarda il vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$sappiamo che esso ha coordinate, rispetto alla base $\mathcal{V}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per trovare le sue coordinate $\underline{x}$ in base $\mathcal{E}^3$, basta semplicemente calcolare

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che fornisce

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 4. (i) Il sistema omogeneo associato ha per matrice dei coefficienti una matrice di rango 3, per ogni valore del parametro $h \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Rouche'-Capelli, il sistema e' compatibile per ogni valore del parametro $h \in \mathbb{R}$.

Pertanto, per ogni $h \in \mathbb{R}$, si ha che $\dim(S_h) = 4 - 3 = 1$, i.e. S_h e' sempre una retta affine dello spazio affine a 4 dimensioni.

(ii) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, la giacitura di S_h e' individuata dal sistema lineare omogeneo associato. Risolvendo tale sistema omogeneo si ottiene che un generatore della giacitura di S_h, i.e. un vettore direttore della retta affine $S_h \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, e' ad esempio il vettore

$$(-h^2 + 4h - 1, -h^2 + 2h - 1, h^3 + h^2 - 5h + 1, 2h - 2)$$

espresso in coordinate (e scritto per riga per comodita') rispetto alla base $\mathcal{E}^4$.

Svolgimento Esercizio 5. (i) La base canonica $\mathcal{E}_V$ di V e' ovviamente

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, p_4(x) = x^3.$$

Un'isomorfismo esplicito con $\mathbb{R}^4$ e' dato ad esempio da

$$p_i(x) \to \underline{e}_i, \ 1 \leq i \leq 4.$$

(ii) Facilmente si deduce che e.g.

$$2, \ x + 3, \ x^2 - x, \ x^3 + x^2$$

sono linearmente indipendenti, pertanto costituiscono la base $\mathcal{B}$ richiesta per V estratta da $\mathcal{S}$.

(iii) Il polinomio $p(x)$ e'

$$2(2) + 3(3 + x) = 10 + 3x;$$

pertanto, in base $\mathcal{E}_V$, il polinomio $p(x)$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alternativamente, ma con un procedimento molto piu' lungo, si determina la matrice cambiamento di base

$$M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_V} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La legge di trasformazione di coordinate e'

$$\underline{x} = M\underline{y}$$

dove $\underline{x}$ denota il vettore delle coordinate di $p(x)$ in base $\mathcal{E}_V$ mentre $\underline{y}$ denota il vettore delle coordinate di $p(x)$ in base $\mathcal{B}$. Visto che conosciamo le coordinate di $p(x)$ in base $\mathcal{B}$, cioe' $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per determinare le coordinate $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{E}_V$ basta fare

$$\underline{x} = M \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$