Esercitazione n° 7
1/12/2021 (Prof. F. Flamini)



Esonero di Geometria 1 per la laurea triennale in Matematica (26 novembre 2021)
Nome e cognome dello studente:

**Esercizio 1** Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento affine standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$. Siano dati il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la retta

$$s: \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}.$$

(i) Dopo avere determinato equazioni parametriche e cartesiane della retta $r$, passante per il punto $P$ e di vettore direttore $\underline{v}$, stabilire la mutua posizione delle rette $r$ e $s$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$, contenente la retta $r$ ed il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) Equazioni parametriche di $r$: $\begin{cases} x_1 = 2+t \\ x_2 = -1-2t \\ x_3 = -t \end{cases}$.
Equazioni cartesiane di $r$: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$
Le rette $r$ e $s$ sono sghembe.

$r$ è il sottospazio affine $P + \langle \underline{v} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è un punto di $r$ se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, cioè se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{cases} x_1 = 2+t \\ x_2 = -1-2t \\ x_3 = -t \end{cases}$ ($\Leftarrow$ Eq. parametriche di $r$).

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in r$ se e solo se il sistema lineare nell'unica incognita $t$ (in cui $x_1, x_2, x_3$ vanno pensati come numeri reali assegnati) $\begin{cases} t = x_1 - 2 \\ -2t = x_2 + 1 \\ -t = x_3 \end{cases}$ $\star$ ammette soluzione. Facendo operazioni elementari sulla matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_1-2 \\ -2 & x_2+1 \\ -1 & x_3 \end{pmatrix}$ si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & x_1-2 \\ -2 & x_2+1 \\ -1 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & x_1-2 \\ 0 & 2x_1+x_2-3 \\ 0 & x_1+x_3-2 \end{pmatrix}$. Quindi $\star$ ammette soluzioni se e solo se

Eq CARTESIANE PER $r$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$

Siccome $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa le equazioni di $s$ e siccome $\underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema omogeneo associato a quello di $s$ si ha $s = A + \langle \underline{w} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$.

•) $r$ e $s$ non sono parallele perché $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non sono proporzionali

••) $r \cap s = \emptyset$ perché $\overrightarrow{PA} \notin \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ cioè $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$.
(infatti facendo E.G. su $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pivot)

Per •) e ••) $r$ e $s$ sono sghembe.

ii) Equazione cartesiana per $\pi$: $\{ x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

$\pi$ è il sottospazio affine generato da $r$ e $A$ quindi $\pi = P + \langle \overrightarrow{PA}, \underline{v} \rangle = \dots$
$\dots = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \pi$ se e solo se $\begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2+1 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Facendo operazioni elementari per righe sulla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-2 \\ 1 & -2 & x_2+1 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix}$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-2 \\ 1 & -2 & x_2+1 \\ 0 & -1 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-2 \\ 0 & -1 & x_1+x_2-1 \\ 0 & -1 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-2 \\ 0 & -1 & x_1+x_2-1 \\ 0 & 0 & -x_1-x_2+x_3+1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \pi \iff \begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2+1 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \iff -x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$ cioè $\{ x_1 + x_2 - x_3 = 1$

EQ. CARTESIANA PER $\pi$

**Esercizio 2** Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali, nell'indeterminata $x$ e di grado al più 3. Sia dato il sottoinsieme

$$U := \{p(x) \in V \mid p(x) = p(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Verificare che $U$ è un sottospazio di $V$ e determinare $\dim(U)$ ed una base di $U$.
(ii) Considerato il sottospazio

$$W := \langle q_1(x) = 3x - x^2,\ q_2(x) = 2x + 4x^3,\ q_3(x) = 2x^2 + 12x^3 \rangle,$$

determinare la dimensione del sottospazio $U + W$, stabilendo inoltre se $U$ e $W$ sono sottospazi supplementari in $V$, i.e. se $V = U \oplus W$.

i) Dim $U = 2$ e una base di $U$ è costituita dai vettori $u_1 = 1$ e $u_2 = x^2$.
Ogni polinomio di $V$ si scrive nella forma $ax^3+bx^2+cx+d$ con $a, b, c, d$ numeri reali.
$ax^3+bx^2+cx+d \in U \iff \forall x \in \mathbb{R}\ ax^3+bx^2+cx+d = a(-x^3)+b(-x)^2+c(-x)+d \iff$
$\forall x \in \mathbb{R}\ ax^3+bx^2+cx+d = -ax^3+bx^2-cx+d = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}\ 2ax^3+2cx = 0 \iff$
$a=0$ e $c=0$. Quindi gli elementi di $U$ sono i polinomi del tipo $bx^2+d$ con $b, d \in \mathbb{R}$, cioè le combinazioni lineari del polinomio $x^2$ e del polinomio costante 1. Equivalentemente $U = \langle 1, x^2 \rangle$. Siccome 1 e $x^2$ non sono proporzionali, essi sono indipendenti e costituiscono base di $U$.
$U$ ha pertanto dimensione 2.

ii) $U + W$ ha dimensione 4 e $U$ e $W$ sono supplementari.
Dalla teoria sappiamo che $\dim V = 4$. Per i) sappiamo che $\dim U = 2$.
Siccome $q_3(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uguaglianza tra polinomi}}}{=} -2q_1(x) + 3q_2(x)$ e $q_1(x)$ e $q_2(x)$ non sono proporzionali
otteniamo che $q_1(x)$ e $q_2(x)$ sono una base per $W$. Quindi $\dim W = 2$.
Siccome $U = \langle 1, x^2 \rangle$ e $W = \langle q_1(x), q_2(x) \rangle$ si ha
$U + W = \langle 1, x^2, 3x - x^2, 2x + 4x^3 \rangle$.
1 e $x^2$ sono linearmente indipendenti e $3x - x^2 \notin \langle 1, x^2 \rangle$ perché $3x - x^2$ non è della forma $bx^2 + d$ con $b, d \in \mathbb{R}$: ne segue che
1, $x^2$ e $3x - x^2$ sono linearmente indipendenti.
Inoltre $2x + 4x^3 \notin \langle 1, x^2, 3x - x^2 \rangle$ perché è un polinomio di grado 3 e non può essere ottenuto come combinazione lineare di polinomi di grado minore o uguale a 2. Quindi i generatori $1, x^2, 3x - x^2, 2x + 4x^3$ di $U + W$ sono linearmente indipendenti e $\dim(U + W) = 4$.
Per mostrare che $U \oplus W = V$ dobbiamo verificare $\cdot)\ U + W = V$ e $\cdot\cdot)\ U \cap W = 0$.
$\cdot)$ Siccome $U + W \subseteq V$ e $\dim(U+W) = \dim(V) = 4$ si ottiene $U + W = V$.
$\cdot\cdot)$ Per la formula di Grassmann abbiamo $\dim U \cap W = \overset{2}{\dim U} + \overset{2}{\dim W} - \overset{4}{\dim(U+W)}$
$= 0$. Perciò $U \cap W$ è il sottospazio vettoriale nullo di $V$.

**Esercizio 3** Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 11 & 14 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata.

a) Trovare basi per nucleo e immagine di $L_A$.

b) Esiste una matrice $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tale che $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

a) Una base del nucleo di $L_A$ è costituito dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Una base dell'immagine di $L_A$ è costituita dai vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dalla teoria sappiamo che $\operatorname{Ker} L_A = \operatorname{Sol}\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Facendo E.G. su A otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix} \underset{III-4I}{\overset{II-I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{III-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\operatorname{Sol}\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema a scala $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$.

Risolvendolo si ottiene $\operatorname{Ker} L_A = \operatorname{Sol}\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Dalla teoria sappiamo che $\operatorname{Im} L_A = \langle A^1, A^2, A^3, A^4 \rangle$.
Siccome la matrice a scala ottenuta da A con E.G. ha pivot nelle I, II e IV colonne, $A^1 A^2$ e $A^4$ costituiscono una base di $\operatorname{Im}(L_A)$.
Quindi $\dim(\operatorname{Im}(L_A)) = 3$ e siccome $\operatorname{Im} L_A \subseteq \mathbb{R}^3$ si ha $\operatorname{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$.
Come base dell'$\operatorname{Im}(L_A)$ possiamo allora scegliere la base canonica di $\mathbb{R}^3$
(Anche $v_1 = A^1$, $v_2 = A^2$ e $v_3 = A^4$ andrebbe bene)

b) Esiste una matrice $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tale che $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Siccome $\operatorname{Im} L_A = \mathbb{R}^3$, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$ tale che $A\bar{x} = \bar{y}$.
In particolare $\exists \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ t.c. $A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\exists \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ t.c. $A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\exists \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ t.c. $A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\exists \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ t.c $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ma allora $A\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & z_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & z_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & z_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$

(Usiamo che $A \cdot B^i$ è la i-esima colonna di $A \cdot B$).

**Esercizio 4** a) Sia $X := \{M \in M_{5,5}(\mathbb{R}) \ : \ rg(M) \leq 4\}$. Stabilire se $X$ è un sottospazio vettoriale di $M_{5,5}(\mathbb{R})$.
b) È vero che per ogni $A \in M_{5,5}(\mathbb{R})$ si ha $rg(AA) \leq rg(A)$?
c) Se $A \in M_{5,5}(\mathbb{R})$ e $rg(AA) = rg(A)$, qual è il massimo valore possibile per la dimensione del sottospazio intersezione $Im(L_A) \cap Ker(L_A) \subseteq \mathbb{R}^5$?

a) $\boxed{X \text{ non è un sottospazio vettoriale di } M_{5,5}(\mathbb{R}).}$

$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ ha rango 3 $\quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ ha rango 2

ma la loro somma è la matrice $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ che ha rango 5.

b) $\boxed{\text{Sì.}}$ Siccome $rg(A) = \dim Im(L_A)$ e $rg(AA) = \dim(Im(L_{A\cdot A}))$, basta mostrare che $Im(L_{AA}) \subseteq Im(L_A)$.
Se $Y \in Im L_{A\cdot A}$ esiste $v \in \mathbb{R}^5$ t.c. $(A\cdot A)v = Y$.
Ma allora, per associatività del prodotto di matrici $A\cdot(Av) = Y$
quindi $L_A(Av) = Y$ cioè $Y \in Im L_A$.
Siccome questo vale $\forall Y \in Im L_{AA}$ deduciamo che $Im(L_{AA}) \subseteq Im L_A$.

c) $\boxed{\text{Il massimo valore di } \dim(L_A \cap Ker L_A) \text{ è } 0.}$
Siccome $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è lineare abbiamo $\dim(Ker(L_A)) + \dim(Im(L_A)) = 5$.
Per Grassmann abbiamo $\dim(Im(L_A) \cap Ker(L_A)) = \dim(Ker(L_A)) + \dim(Im(L_A)) - \dim(Ker(L_A) + Im(L_A))$.
Quindi $\dim(Im(L_A) \cap Ker(L_A)) = 5 - \dim(Im(L_A) + Ker(L_A))$.
Pertanto basta mostrare che $Im(L_A) + Ker(L_A) = \mathbb{R}^5$, cioè che $\forall x \in \mathbb{R}^5$ $\exists v_1 \in Im(L_A)$ e $v_2 \in Ker(L_A)$ tali che $x = v_1 + v_2$.
Per quanto visto in b) abbiamo $Im(L_{AA}) \subseteq Im L_A$ e siccome $\dim(Im(L_{AA})) = rg(AA) = rg(A) = \dim(Im(L_A))$ deduciamo $Im(L_{AA}) = Im(L_A)$.
Quindi $\forall x \in \mathbb{R}^5$ $\exists w \in \mathbb{R}^5$ tale che $L_A(x) = L_{AA}(w)$, cioè
$Ax = (A\cdot A)w$ e quindi $Ax - (A\cdot A)w = 0$, da cui, per associatività e distributività del prodotto di matrici, si ottiene $A(x - Aw) = 0$
ovvero $x - Aw \in Ker L_A$. In conclusione $x = Aw + (x - Aw)$
e $Aw \in Im(L_A)$ e $x - Aw \in Ker(L_A)$.

c) Soluzione leggermente diversa.
Se $x \in Ker L_A$ $(AA)x = A(Ax) = A\,0 = 0$, quindi $x \in Ker L_{AA}$. Quindi $Ker(L_A) \subseteq Ker(L_{AA})$.
Inoltre $\dim(Ker(L_A)) = 5 - \dim(Im(L_A)) = 5 - rg A = 5 - rg AA = 5 - \dim(Im(L_{AA})) = \dim(Ker(L_{AA}))$.
Perciò $Ker(L_A) = Ker(L_{AA})$. $\star$
Se $x \in Ker(L_A) \cap Im(L_A)$ esiste $w \in \mathbb{R}^5$ tale che $Aw = x$ e $A(Aw) = 0$.
Per associatività $A(Aw) = 0$ implica $(AA)w = 0$ cioè $w \in Ker(L_{AA})$.
Per $\star$ si ha $w \in Ker L_A$ e allora $x = Aw = 0$: $Ker(L_A) \cap Im(L_A)$ contiene solo il vettore nullo.

Esercizio 5 NUOVO



$$\mathcal{B} = \{ \underline{b}_1 = 2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \,,\ \underline{b}_2 = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 \}$$

$\underline{u} = 5\underline{b}_1 - 4\underline{b}_2$

$\underline{z} = \underline{e}_1 + 6\underline{e}_2$

$\underline{w} = 3\underline{e}_1 + 6\underline{e}_2$

(i) La matrice che scrive $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{E}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango due quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

(ii) Il vettore $\underline{u}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$

Con i metodi delle volte scorse

$$\underline{u} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 = 5\underline{b}_1 - 4\underline{b}_2 = 5(2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) - 4(2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = 10\underline{e}_1 + 10\underline{e}_2 - 8\underline{e}_1 - 12\underline{e}_2 = 2\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2$$

$\Rightarrow$ $\underline{u}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{E}$

Ma utilizzando la matrice cambiamento di base o coordinate

se $\underline{u} = (\underline{e}_1 \ \underline{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\underline{b}_1 \ \underline{b}_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ espressione in coordinate di $\underline{u}$ nelle due basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente

allora sappiamo che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 - 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

(iii) Viceversa per $\underline{z}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 = 6 \end{cases}$ $\rightarrow$ II eq. − I eq. $\boxed{y_2 = 5}$

e quindi $2y_1 = 1 - 10 = -9$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = -9/2}$

Le coordinate di $\underline{z}$ in base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} -9/2 \\ 5 \end{pmatrix}$ i.e.

$$\underline{z} = -\frac{9}{2}\, \underline{b}_1 + 5\, \underline{b}_2$$

(iii) Se $\mathcal{E}^3 = \{ \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3 \}$ è base canonica di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathcal{E}^2 = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{f}_1) &= \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \\ \varphi(\underline{f}_1 - \underline{f}_2) &= \underline{0} \\ \varphi(\underline{f}_3 - 2\underline{f}_2) &= \underline{0} \end{aligned} \iff \begin{aligned} \varphi(\underline{f}_1) &= \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \\ \varphi(\underline{f}_1) &= \varphi(\underline{f}_2) \\ \varphi(\underline{f}_3) &= 2\varphi(\underline{f}_2) \end{aligned}$$

quindi

$$M^{\mathcal{E}^2}_{\mathcal{E}^3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(M^{\mathcal{E}^2}_{\mathcal{E}^3}(\varphi)) = 1 \Rightarrow$

$\varphi$ non suriettiva con $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1$

$\varphi$ non iniettiva con $\dim(\ker(\varphi)) = 3 - 1 = 2$

(iv) Poichè

$$\operatorname{rg}(M^{\mathcal{E}^2}_{\mathcal{E}^3}(\varphi)) = 1$$

ma

$$\operatorname{rg}\left( \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right) \right) = 2$$

$\Rightarrow \underline{z} \notin \operatorname{Im}(\varphi)$ cioè $\varphi(\underline{x}) = \underline{z}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

è INCOMPATIBILE per Rouché - Capelli

$\Rightarrow \overleftarrow{\varphi}(\underline{z}) = \emptyset$

(v) Invece

$$\operatorname{rg}(M^{\mathcal{E}^2}_{\mathcal{E}^3}(\varphi)) = \operatorname{rg}\left( \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right) \right) = 1$$

cioè $\underline{w} \in \operatorname{Im}(\varphi)$ per Rouché-Capelli e

$\overleftarrow{\varphi}(\underline{w}) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\underline{x}) = \underline{w} \}$ è dato da

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$ equivalente a

$$\boxed{x_1 + x_2 + 2x_3 = 3} \rightsquigarrow$$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$

$x_3 = t,$

$x_2 = s$

$x_1 = 3 - s - 2t$

$$\Rightarrow \overleftarrow{\varphi}(\underline{w}) = \begin{pmatrix} 3 - s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cioè $$\boxed{\overleftarrow{\varphi}(\underline{w}) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soluzione particolare di $A\underline{x} = \underline{w}$

$s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ soluzione generale dell'omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$